Chapitre 6: Calcul d'intégrales et de primitives-résumé de cours

---

Dans ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial et $\mathbb{K}$ l'ensemble des réels ou des complexes.

1. Des rappels

1.1 Primitive

Déf: Soit f et F des fonctions de I dans $\mathbb{K}$, F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Proposition 6.1 : Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une infinité toutes égales à une constante près.

Proposition 6.2: Soit f et g $\in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.

① $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha F + \beta G)$ est une primitive de $(\alpha f + \beta g)$ sur I.

② Re(F) (resp. Im(F)) est une primitive sur I de Re(f) (resp. Im(f)).

Dans la pratique : Il faut connaître les primitives usuelles : cf fiche en annexe

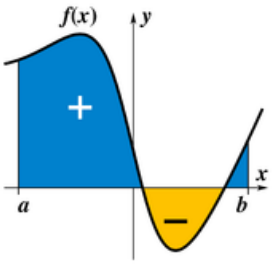
• Une primitive de $\cos^p x \sin^q x$ s'obtient après linéarisation.
Si p ou q est impair, alors on peut faire apparaître la primitive usuelle $u'u^n$ avec u = cos u u = sin

• Une primitive de $f : x \mapsto \cos(\omega x) e^{\alpha x}$ ou $f : x \mapsto \cos(\omega x) e^{\alpha x}$ avec ω et α réels

on utilise $f(x) = \text{Re}\left(e^{(\alpha+i\omega)x}\right)$ ou $\text{Im}\left(e^{(\alpha+i\omega)x}\right)$ et on utilise la primitive de e^{ax} avec $a \in \mathbb{C}^*$.

1.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Rappel: Soit a, b$\in\mathbb{R}$, a ≤ b et f :[a, b]→$\mathbb{R}$, une fonction continue. Comme en Terminale, nous considérons pour l'instant que l'intégrale de a à b de f est le réel noté $\int_a^b f(t)dt$ qui est égal à l'aire algébrique du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe (Ox) et les droites x = a et x = b, exprimée en unité d'aire



• **Extension à deux réels a et b quelconque** : Si b < a, on pose $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

• **Extension aux fonctions à valeurs complexes** : Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ est continue, pour tout réel a et b de I, on pose $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \text{Re}(f)(t)dt + i\int_a^b \text{Im}(f)(t)dt$

L'intégrale de Riemann sera définie formellement et étudiée dans une chapitre ultérieur

★ Remarque : La variable d'intégration est muette i.e. $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots$

Proposition 6.3 : **Propriétés de l'intégrale:**
Soit f et g continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et a, b et c trois réels de I.

① $\int_a^a f(t)dt = 0$ et $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$ *Convention*

② Relation de Chasles: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ *admis ici*

③ Linéarité: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \int_a^b \left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$ *admis ici*

④ Positivité: Si $a \le b$ et $f \ge 0$ sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$ *admis ici*

⑤ Croissance de l'intégrale: Si $a \le b$ et $f \le g$ sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$

⑥ Inégalité triangulaire: Si $a \le b$ alors $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$

1.3 Lien entre intégrales et primitives d'une fonction

Théorème fondamental de l'analyse : Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$,

$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

★ *Conséquences* :

- Toute fonction continue sur I admet une infinité de primitives sur I.

Soit a fixé dans I, l'ensemble des primitives de f sur I est { $x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k$, k décrit $\mathbb{K}$ }.

Soit G une primitive quelconque de f sur I et $a \in I$, on a : $\forall x \in I$, $G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt$

- Si f est continue sur I, la notation : $\int^x f = \int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f sur I. Par exemple, $\int^x e^{-t}dt = -e^{-x}$

Corollaire 6.1 : Soit f une fonction continue sur I,

$\forall$ a, b$\in$I, $\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I.

---

2. Formule d'intégration par parties.

Théorème 6.1: Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors

$\forall x \in I$, $\int^x u(t)v'(t)dt = u(x)v(x) - \int^x u'(t)v(t)dt$

Remarque : L'application de cette formule au claul d'intégrale donne

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors

$\forall$ a, b$\in$I, $\int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

✍ Exemples classiques d'utilisation

$\int_0^1 \underset{\downarrow}{x}\overset{\uparrow}{e^x}\,dx$ $\qquad$ $\int_1^x \underset{\downarrow}{t^2}\overset{\uparrow}{\ln t}\,dt$ $\qquad$ $\int^x \ln t\,dt = \int^x \overset{\uparrow}{1} \times \underset{\downarrow}{\ln t}\,dt$

---

3. Formule de changement de variable

3.1 Le théorème

Théorème: Soit f continue sur I et $\varphi : [a,b] \to I$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a,b].

On a $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \underset{t=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$

3.2 Application au calcul d'intégrales et de primitives:

Méthode:
- On choisit φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a, b].
- On échange t et $\varphi(x)$
- On échange dt et $\varphi'(x)dx$.
- On modifie les bornes de l'intégrale.

✍ Exemple 1 : Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ en posant cosx = t

On a $t = \cos(x) = \varphi(x)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$dt = \varphi'(x)dx = -\sin x\, dx$ on a $t \left| \begin{matrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ quand $x \left| \begin{matrix} \pi/4 \\ 0 \end{matrix} \right.$.

$$\text{Donc } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x} dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(1-t^2)}{t^2} dt = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt$$

✍ Exemple 2: $J = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$ en posant t = sinx

On a $t = \sin(x) = \varphi(x)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$dt = \varphi'(x)dx = \cos x\, dx$ on a $t \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$ quand $x \left| \begin{matrix} \pi/2 \\ 0 \end{matrix} \right.$.

$$\text{Donc } J = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2x)) dx$$

♥ Un changement de variable à connaître

Lorsqu'on cherche les primitives d'un quotient de fonctions trigonométriques il faut penser au changement de variable u = tan(t/2) et utiliser les formules $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$.

On se ramène ainsi à intégrer une fonctions rationnelles.

✍ Exemple : Expliciter $\int^x \frac{dt}{1+\sin t}$ sur I =]-π ;π[.

On a $u = \tan(t/2) = \varphi(t)$ avec φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

$$du = \varphi'(t)dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(t/2)\right)dt = \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)dt \text{ donc } dt = \frac{2du}{1+u^2} \text{ et } u \left| \begin{matrix} \tan(x/2) \\ \end{matrix} \right. \text{ quand } t \left| \begin{matrix} x \\ \end{matrix} \right.$$

$$\text{Donc } J = \int^x \frac{dt}{1+\sin t} = \int^{\tan(x/2)} \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \times \frac{2du}{1+u^2} = \int^{\tan(x/2)} \frac{2}{(1+u)^2} du$$

---

4. Problèmes insolubles :

Voici quelques exemples de fonctions dont il ne faudra pas chercher à calculer une primitive. En effet, on peut démontrer qu'il est impossible d'expliciter leurs primitives à l'aide des fonctions usuelles : $x \mapsto e^{\pm x^2}$ $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$