Chapitre 8-Ensembles et applications – résumé

Il est indispensable de mémoriser durablement le vocabulaire (en gras) défini dans ce chapitre.

1. Ensembles – Rappels et compléments

Se reporter au chapitre 0

Rappel : Un ensemble est une collection d'objets.

On peut le décrire des façons suivantes :

- En le nommant si une notation lui a été attribué: $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines nièmes de 1
- En extension c'est à dire en listant ses éléments : $\mathbb{U}_n = \{ e^{i2k\pi/n}, k\in[\![0, n-1]\!] \}$
- En compréhension c'est à dire en caractérisant ses éléments par une propriété $\mathcal{P}$

$\mathbb{U}_n = \{ z\in\mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$

Rappel: Soit E et A deux ensembles. A est une partie, ou un sous-ensemble, de E lorsque tout élément de A est dans E. On note $A\subset E$ et on lit "A est inclus dans E"

Attention à ne pas confondre :
$\in$ est réservé aux éléments $\subset$ est réservé aux parties.

Déf: On note $\mathcal{P}(E)$ **l'ensemble des parties** de l'ensemble E.

Exemple: Si E = {1, 3, 2} alors $\mathcal{P}(E) = \{ \varnothing, \{1\},\{2\}, \{3\}, \{1,2\},\{2,3\}, \{1,3\}, \{1, 2, 3\} \}$

$\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\varnothing$ et E.

Attention: $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

Def Soit A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
L'**intersection** de A et de B est $A\cap B = \{x\in E \mid x\in A$ **et** $x\in B\}$
La **réunion** de A et de B est $A\cup B = \{x\in E \mid x\in A$ **ou** $x\in B\}$.
Le **complémentaire** de A dans E est $\overline{A} = \{x\in E, x\notin A\}$

★ Vocabulaire: Lorsque $A\cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjoints.

★ Remarques :
- On a les inclusions évidentes: $A\cap B \subset A \subset A\cup B$ $A\cap B \subset B \subset A\cup B$
- Il est clair que $A\cup A = A\cap A = A$, $A\cap E = A$, $A\cap\varnothing = \varnothing$, $A\cup E = E$, $A\cup\varnothing = A$

Proposition 8.1: $\forall A, B, C\in \mathcal{P}(E)$.
① $A\cap B = B\cap A$ et $A\cup B = B\cup A$ *commutativité*
② $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ et $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ *associativité*
③ $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ et $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ *distributivité*
④ $\overline{\overline{A}} = A$
⑤ $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ *Lois de Morgan*

2. Applications:

2.1 Généralités:

Déf: Soit E et F deux ensembles. Une **application** de E dans F est un procédé qui à tout élément de E associe un unique élément de F.

On note $f:\begin{cases} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$

★ Vocabulaire et notation:

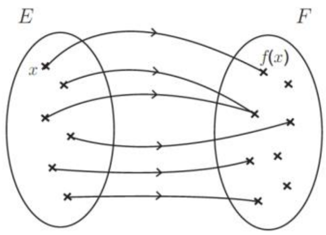
E est **l'ensemble de définition**.
F est **l'ensemble d'arrivée**.
f(x) est **l'image** de x par f, f(x) est un élément de F et donc ne désigne pas l'application.
Si y = f(x) alors x est **un antécédent** de y par f.

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E.

Exemples:

• $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ • $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \end{cases}$ • $p : \begin{cases} \vec{\mathcal{P}}^2 \to \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}.\vec{v} \end{cases}$

• On peut utiliser un diagramme sagittal pour représenter f:



★ Dans la pratique: Pour montrer que deux applications f et g sont égales il faut montrer qu'elles ont même ensemble de définition E, même ensemble d'arrivée F et que $\forall x \in E$, f(x) = g(x)

★ Cas particuliers à connaître:

• **L'identité de E** noté Id_E est l'application $Id_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$

• Soit A une partie de E, on appelle **fonction indicatrice de A** l'application de E dans {0, 1} définie par $\forall x \in E$, $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$

Def: Soit $f : E \to F$ une application, on appelle **graphe** de f l'ensemble :
$G_f = \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$.

Exemple : La fonction définie sur $[\![1, 3]\!]$ par $f(k) = k^2$ a pour graphe : $G = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

2.2 Famille d'éléments d'un ensemble, partition

Def : Soit I et E deux ensembles, une **famille d'éléments de E indexée par I** est une application définie par $\begin{cases} I \to E \\ i \mapsto e_i \end{cases}$, on note cette famille $(e_i)_{i \in I}$

Exemples.
Si $I = [\![1, n]\!]$, et $\forall z_i \in [\![1, n]\!]$, $z_i \in \mathbb{C}$ alors $(z_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille de n nombres complexes
Si $I = \mathbb{Z}$, $(]k\pi, (k+1)\pi[)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille d'intervalles de $\mathbb{R}$

★ Notation : Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{P}(E)$ indexée par les éléments de I.
On définit $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcap_{i \in I} A_i$ par :

$x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ssi $\exists i \in I, x \in A_i$ et $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ssi $\forall i \in I, x \in A_i$.

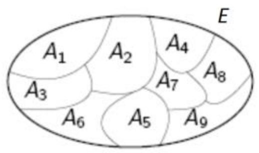
Exemple : l'ensemble de définition de la fonction tangente est $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

Def : Soit E et I deux ensembles.
On considère A une partie de E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{P}(E)$.

① On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement disjoint** de A si on a
$\forall(i, j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j = \varnothing$ et $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$

② On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition** de E lorsque
$\forall i\in I$, $A_i\neq\varnothing$, et $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E c'est-à-dire

$$\begin{cases} \forall i \in I, A_i \neq \varnothing \\ \forall (i,j) \in I^2, \left(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right) \\ E = \bigcup_{i\in I} A_i \end{cases}$$



Exemples :
- La famille des groupes de colles est une partition de la PCSI2
- La famille formée des entiers pairs et des entiers impairs est une partition de $\mathbb{Z}$.

Exercice : Donner toutes les partitions de E = {1, 2, 3}

2.3 Restriction et prolongement:

Def: Soit $f:E\to F$ et A une partie de E.
- La **restriction** de f à A est l'application $f_{|A} : \begin{cases} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$
- On dit que g est un **prolongement** de f lorsque f est une restriction de g.

Exemples:
- On peut restreindre $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ à tout intervalle de $\mathbb{R}_+$.
- $g : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z = x + iy \mapsto e^z = e^x e^{iy} \end{cases}$ prolonge la fonction exponentielle réelle.

Remarque et vocabulaire : On peut également modifier l'ensemble d'arrivée.
Soit $f:E\to F$ et B une partie de F tel que $\forall x\in E$, $f(x)\in B$, on peut définir l'application
$h : \begin{cases} E \to B \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. Dans ce cas on dit que h est **induite** par f.

Exemple : La fonction carrée induit la fonction $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

2.4 Image directe et image réciproque:

Def: Soit $f:E\to F$, A une partie de E et B une partie F.
- **L'image directe** de A par f est la partie de F constituée des images des éléments de A par f.
On note $f(A) = \{f(x), x\in A\} = \{y\in F \mid \exists x\in A, y = f(x)\}$

• **L'image réciproque** de B par f est la partie de E constituée par les antécédents des éléments de B par f.
On note $f^{-1}(B) = \{x\in E \mid f(x)\in B\}$

⚠ Attention : On écrit $f^{-1}(B)$ même si f n'est pas bijective.

★ Dans la pratique: On utilisera les caractérisations suivantes :

$y\in f(A) \Leftrightarrow \exists x\in A, y = f(x)$.

$x\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x)\in B$.

Exemples:

• Soit $f : \begin{cases}]-\pi;\pi] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin x \end{cases}$

$f(]-\pi, \pi]) = [-1, 1]$ $\quad f([0, \pi/2]) = [0, 1]$ $\quad f^{-1}([0, 1/2]) = [0, \pi/6]\cup[5\pi/6, \pi]$ $\quad f^{-1}([2, 3]) = \varnothing$

• Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ $\quad g(\mathbb{R}) = \mathbb{U}$ $\quad g^{-1}(\{1\}) = 2\pi\mathbb{Z}$

Remarques : Soit $f : E\to F$
$f(\varnothing) = \varnothing$ et $f(E) \subset F$ mais on n'a pas nécessairement $f(E) = F$!!
$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(F) = E$

2.4 Composition d'applications:

Def: Soit E, F et G trois ensemble et $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications. La **composée** de f par g est l'application gof: $\begin{cases} E \to G \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$ ou encore gof: $x\in E \underset{f}{\mapsto} f(x)\in F \underset{g}{\mapsto} g(f(x))\in G$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Proposition 8.2 : Propriétés de la composition: Soit $f:E\to F$, $g:F\to G$ et $h:G\to H$
① o n'est pas commutative
② $Id_F \circ f = f$ et $f\circ Id_E = f$
③ $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ *associativité*

---

3. Injection, surjection et bijection

3.1 Application injective

Def: Soit $f:E\to F$, f est **injective**, ou est une **injection**, lorsque tout élément de F admet au plus un antécédent par f.

Dans la pratique: On utilisera les caractérisations suivantes: Soit $f:E\to$

f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in E, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

f est injective $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2\in E, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

f est injective $\Leftrightarrow \forall y\in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans E.

Exemple et contre-exemple:

$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est injective $\quad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$, ne sont pas injectives

Proposition 8.3: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$, si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

★ Remarque : Il n'est pas nécessaire que la fonction soit continue sur I.

Proposition 8.4:
① La composée de deux applications injectives est injective.
② Si la composée $g\circ f$ est injective alors f est injective.

3.2 Application surjective

Def: Soit $f:E\to F$, f est **surjective**, ou est une **surjection** de E sur F (ou dans F), lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

★ Dans la pratique: On utilisera les caractérisations suivantes: Soit $f:E\to F$

f est surjective $\Leftrightarrow \forall y\in F, \exists x\in E, f(x) = y$

f est surjective $\Leftrightarrow$ $\forall y\in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E

f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(E) = F$

Exemple et contre-exemple:

- $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ n'est pas surjective (mais est injective)
- $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est surjective (mais pas injective)
- $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$, n'est ni surjective (ni injective)

★Remarque : A partir d'une application $f : E\to F$, on peut toujours induire une surjection en considérant $g : \begin{cases} E \to f(E) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$. Par exemple $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{U} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ est surjective.

Proposition 8.5:
① La composée de deux applications surjectives est surjective.
② Si la composée $g\circ f$ est surjective alors g est surjective.

3.3 Application bijective

Def: Soit $f:E\to F$, f est **bijective**, ou est une **bijection** de E sur F (ou dans F), lorsque tout élément de F admet un unique antécédent par f.

Dans la pratique: On utilise les caractérisations suivantes: Soit $f:E\to F$

f est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective.
f est bijective $\Leftrightarrow$ $\forall y\in F, \exists! x\in E, f(x) = y$
f est bijective $\Leftrightarrow$ $\forall y\in F$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans E

Exemples et contre-exemples:

- $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ sont bijectives en tant que fonctions de la variable réelle continues et strictement monotones sur un intervalle (th de la bijection).
- $z = x + iy \mapsto M(x, y)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.
- $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une bijection de $]-\pi;\pi]$ sur $\mathbb{U}$, mais pas de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$ ni de $]-\pi, \pi]$ sur $\mathbb{C}$.

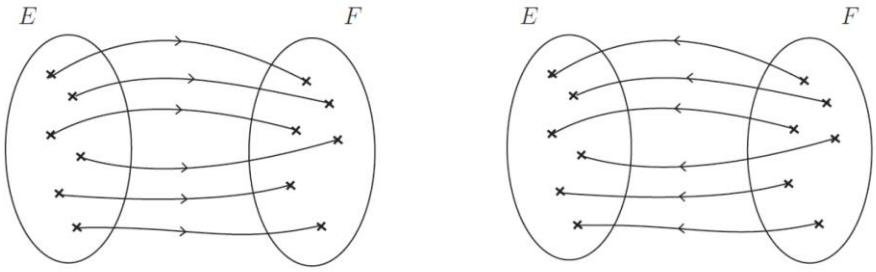
• Compter les élèves de la classe revient à construire une bijection de l'ensemble PCSI2 dans l'ensemble $[\![1, 48]\!]$.

★ Vocabulaire: Une bijection de E dans lui-même est appelée une **permutation.**

Proposition 8.6:
① La composée de deux applications bijectives est bijective.
② Si la composée $g \circ f$ est bijective alors f est injective et g est surjective.

Def: Soit $f : E \to F$ une bijection, on peut définir une application de F dans E qui à tout y de F associe son unique antécédent par f. Cette application est la **bijection réciproque** de f notée f^{-1}.

$$f^{-1} : \begin{cases} F \to E \\ y \mapsto x \text{ tel que } f(x) = y \end{cases}$$



Représentation de f Représentation de f^{-1}

★ Conséquences:

• $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

• $x \overset{f}{\mapsto} y \overset{f^{-1}}{\mapsto} x$ soit $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $y \overset{f^{-1}}{\mapsto} x \overset{f}{\mapsto} y$ soit $f \circ f^{-1} = Id_F$

★ En pratique: Pour montrer que f est une bijection, on peut montrer que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution pour tout y de F, en exprimant x en fonction de y. Cela donne du même coup l'expression de f^{-1}.

⚠ Attention aux notations !! Soit $f : E \to F$.
• Si B est une partie de F, $f^{-1}(B)$ existe toujours et est l'image réciproque de B par f, en revanche pour $y \in F$, $f^{-1}(y)$ n'a de sens que si f est bijective.

• Si f est bijective alors $f^{-1}(B)$ est à la fois l'image réciproque de B par f mais aussi l'image directe de B par f^{-1}

Proposition 8.7: Soit $f : E \to F$.
Si il existe $g : F \to E$ tel que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

★ Conséquences: Soit $f : E \to E$. On dit que f est **involutive**, ou est une **involution**, lorsque $f \circ f = Id_E$. D'après le théorème précédent, une involution est bijective et $f^{-1} = f$.
Par exemple :
• La fonction inverse • les symétries du plan, • la conjugaison dans $\mathbb{C}$.

Proposition 8.8: Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections alors $g \circ f : E \to G$ est aussi une bijection et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.