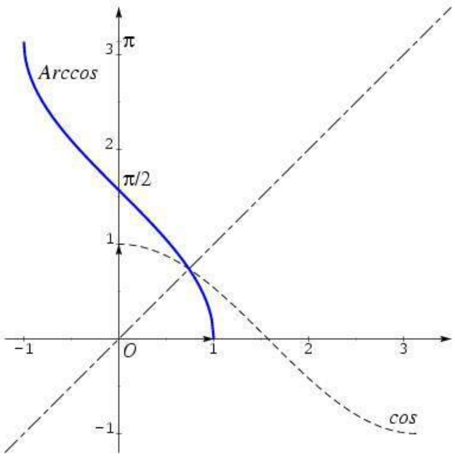
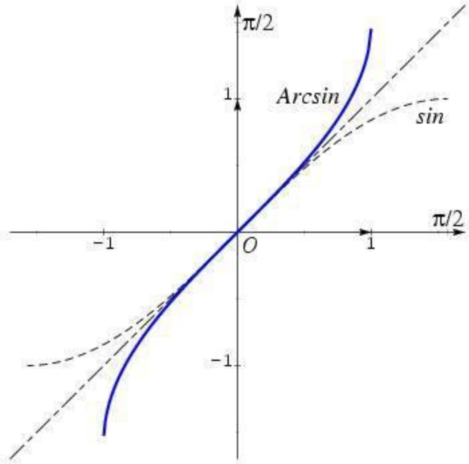
Fonctions usuelles 2

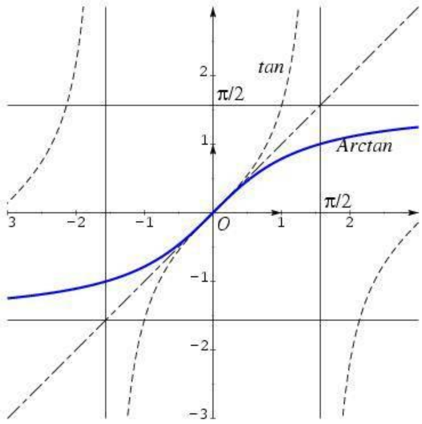
arccosinus



arcsinus



arctangente



<u>Formules à savoir démontrer:</u>

- $\forall x \in [-1, 1]$,
  $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x<0 \end{cases}$

<u>Limites à connaître:</u>

$\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$

Nom	**Arccosinus**	**Arcsinus**	**Arctangente**
Notation	Arccos	Arcsin	Arctan
Bijection de $I \to f(I)$	$[-1, 1] \to [0;\pi]$	$[-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$	$\mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$
Parité	$\times$	Impaire	Impaire
Période	$\times$	$\times$	$\times$
$D_{f'}$	$]-1, 1[$	$]-1, 1[$	$\mathbb{R}$
$f'(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
Monotonie	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Formulaire: Toutes les primitives usuelles

f(x)	F(x)	Conditions d'application
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	valable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ valable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$ - valable sur $]0, +\infty[$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\|x-a\|$	valable sur $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$
e^{ax} $a \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$	valable sur $\mathbb{R}$.
$\ln x$	$x\ln x - x$	valable sur $]0 ;+\infty[$
$\mathrm{ch}x$ $\mathrm{sh}x$ $\mathrm{th}x$ $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathrm{sh}x$ $\mathrm{ch}x$ $\ln(\mathrm{ch}x)$ $\mathrm{th}x$	$\Big\}$ valables sur $\mathbb{R}$.
$\cos x$ $\sin x$	$\sin x$ $-\cos x$	valable sur $\mathbb{R}$
$\cos(\omega t+\varphi)$ $\sin(\omega t+\varphi)$	$\dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)$ $-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)$	valable sur $\mathbb{R}$.
$\tan x$ $\mathrm{cotan} x$ $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$-\ln\|\cos x\|$ $\ln\|\sin x\|$ $\tan x$	valable sur I où $\cos x \neq 0$ valable sur I où $\sin x \neq 0$ valable sur I où $\cos x \neq 0$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ ou $-\arccos x$	valable sur $]-1 ; 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}$	valable sur $]-a ; a[$, $a > 0$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	valable sur $\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}$	valable sur $\mathbb{R}$, $a > 0$

Soit u une fonction dérivable sur I, sous réserve d'existence

- Une primitive de $u'u^{\alpha}$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ avec α réel

Avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $u'\sqrt{u}$ est $\dfrac{2}{3}u\sqrt{u}$

- Une primitive de $\dfrac{u'}{u^{\beta}} = u'u^{-\beta}$ est $\dfrac{u^{-\beta+1}}{-\beta+1} = \dfrac{-1}{\beta-1}.\dfrac{1}{u^{\beta-1}}$ avec β réel, $\beta\neq 1$

Avec $\beta = \dfrac{1}{2}$, on obtient : une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$

- Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$
- Une primitive de $u'e^{u}$ est e^{u}
- Une primitive de $u'\cos(u)$ est $\sin(u)$
- Une primitive de $u'\sin(u)$ est $-\cos(u)$
- Une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$ est $\arctan(u)$
- Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ est $\arcsin(u)$

Comment obtenir une primitive de f : $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ avec a, b et c réels, a ≠ 0.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$

<u>1er cas : $\Delta > 0$</u> : On note x_1 et x_2 les racines de $ax^2 + bx + c$.

$\exists (A,B)\in\mathbb{R}^2$, $f(x) = \dfrac{A}{x-x_1} + \dfrac{B}{x-x_2}$ et donc une primitive de f est $F(x) = A\ln|x - x_1| + B\ln|x - x_2|$

<u>2ème cas : $\Delta = 0$</u> : On note x_0 la racine double de $ax^2 + bx + c$.

$f(x) = \dfrac{1}{(x-x_0)^2}$ et donc une primitive de f est $F(x) = \dfrac{-1}{x-x_0}$

<u>3ème cas : $\Delta < 0$</u> : $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de racine réelle, on l'écrit sous forme canonique

$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4a^2}\right]$ car $\Delta = -|\Delta|$.

On effectue alors le changement de variable $u = x + \dfrac{b}{2a}$ et on utilise $\displaystyle\int \frac{dt}{u^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{u}{\alpha}\right)$

Exemple : Soit f : $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$. Le dénominateur n'a pas de racines réelles donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \int^x \frac{dt}{2t^2+2t+1} = \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \underset{u=t+\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2}\int^{x+\frac{1}{2}} \frac{dt}{u^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\Big[2\arctan(2u)\Big]^{x+\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\text{CCl : } F(x) = \arctan(2x+1)}$