

## Exercices - Chapitre 6: Calcul d'intégrales et de primitives

## Calculer et rédiger

♥ 6.1. Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties :

$$A = \int_1^2 (2t+1) \ln t \, dt \quad B = \int_{-1}^1 t e^{2t} \, dt \quad C = \int_0^1 (x^2 - 2x) e^{3x} \, dx \quad D = \int_0^1 \ln(t+1) \, dt$$

$$E = \int_{-1}^1 e^x \sin x \, dx \quad F = \int_0^1 t^2 \sqrt{1-t} \, dt \quad G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^3(t) \, dt$$

♥ 6.2. Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

$$A = \int_0^{\pi/4} \tan^3 t \, dt \text{ en posant } \cos t = x \quad B = \int_0^1 \frac{e^x \, dx}{2 + e^x} \text{ en posant } e^x = t$$

$$C = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^3} \, dx \text{ en posant } x = \tan(u) \quad D = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \, dx \text{ en posant } t = \sqrt{e^x + 1}$$

$$E = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} \, dx \text{ en posant } t = \sin x$$

COURS

♥ 6.3 Calculer une primitive des fonctions suivantes en précisant un intervalle de validité.

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \quad f_2 : x \mapsto x \tan^2 x \quad f_3 : x \mapsto \sin^5 x \quad f_4 : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2 x}$$

$$f_5 : t \mapsto \frac{1}{t \ln^2 t} \quad f_6 : t \mapsto \cos^4 t \sin^2 t \quad f_7 : t \mapsto \frac{1}{1 + \cos t} \quad f_8 : t \mapsto (t^2 - t + 3)e^{2t}$$

$$f_9 : x \mapsto e^x \sin x \quad f_{10} : x \mapsto \frac{1}{\sin x} \quad f_{11} : x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \quad f_{12} : x \mapsto x^3 \sin x$$

## 6.4 Cas des fractions rationnelles

a. Déterminer les réels a, b et c tels que  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1/2\}, \frac{2x+1}{x^2(2x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{2x-1}$ puis déterminer une primitive de  $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2(2x-1)}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1/2\}$ .b. Déterminer les réels a, b et c tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = ax + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$ puis déterminer une primitive de  $g : x \mapsto \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$  sur  $\mathbb{R}$ .

♦ 6.5 Calculer les intégrales suivantes après avoir rapidement justifié leurs existences.

$$I_1 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} \, dx \quad I_2 = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx \quad I_3 = \int_0^{\pi} \left| \cos t + \frac{1}{2} \right| \, dt \quad I_4 = \int_0^2 e^{|x-1|} \, dx$$

$$I_5 = \int_0^2 x e^{-x^2} \, dx \quad I_6 = \int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx \quad I_7 = \int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx \quad I_8 = \int_0^x \sup\left(\frac{1}{2}, t\right) \, dt$$

$$I_9 = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx \quad I_{10} = \int_{-1}^1 \left( \sqrt{1-t^3} - \sqrt{1+t^3} \right) \, dt \quad I_{11} = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin(3x) \, dx$$

$$I_{12} = \int_1^2 (\ln x)^2 \, dx, \text{ en posant } u = \ln x$$

**Chercher, calculer et rédiger**

6.6 On pose  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$

- Justifier l'existence de I et de J puis calculer I + J.
- Montrer que I = J et en déduire les valeurs de I et de J

c. En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}$

**♥ 6.7 Intégrales de Wallis**

Pour tout entier naturel n, on pose  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

- Calculer  $I_0$  et  $I_1$ , puis justifier, à l'aide d'un changement de variable que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

b. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .

c. Donner une expression de  $I_n$  à l'aide de factorielles en distinguant les cas  $n = 2p$  et  $n = 2p + 1$

6.8 Calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$  en utilisant un changement de variable affine qui échange les bornes de cette intégrale.

6.9 On cherche à obtenir les primitives de  $f: x \mapsto \frac{1}{1 - \cos x}$ .

- Sur quels intervalles f admet-elle des primitives ?
- Soit  $x \in ]0, \pi[$ , montrer qu'on peut poser  $u = \tan \frac{t}{2}$  dans  $\int \frac{dt}{1 - \cos t}$  et appliquer ce changement de variable.
- Calculer pour  $\int \frac{dt}{1 - \cos t}$   $x \in ]\pi, 2\pi[$ .
- Déterminer les primitives de f sur  $]0, 2\pi[$

6.10 Calculer la valeur de  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$  en transformant le dénominateur.

6.11 Pour  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ , on pose  $I_{n,p} = \int_0^1 t^n (1-t)^p dt$

- Calculer  $I_{2,1}$
- Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, I_{n,p} = \frac{n}{p+1} I_{n-1,p+1}$
- En déduire une expression de  $I_{n,p}$  en fonction de n et de p.

