Exercices-Chapitre 7: Equations différentielles

♦ **Eléments de correction**

♦ *Notion d'équation différentielle*

7.1 Déterminer une fonction polynôme du second degré solution sur $\mathbb{R}$ de $2y' - y = x^2 - 3x + 1$

7.2 a. Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions de la forme $x \mapsto f(x) = \dfrac{x+\lambda}{1+x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, seraient les solutions sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction sinus hyperbolique est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant.

7.3 Donner l'allure des courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec a et b réels et $a \neq 0$.

♥-♦ *EDL du 1^er^ ordre*

7.4 Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:
On cherchera une solution particulière en observant le second membre

(E_1): $y' + 2x^3y = x^3$ (E_2): $y' + 2y = 2e^{-2x}$ (E_3): $y' + 2y = x^2$
(E_4): $y' + y = 2e^x + 2\cos x$ (E_5): $(1 + x^2)y' + 3xy = 5x^3 - x$ (E_6): $y' - y = (x + 1)e^x$

7.5 Résoudre les équations différentielles suivantes
On cherchera une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante

(E_1) : $xy' - y = x^2\cos x$ sur $I =]0, +\infty[$ (E_2): $y' - y\tan(x) = \cos^2 x$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

(E_3) : $(x\ln x)y' - y = \ln x$ sur $I =]0, 1[$ (E_4) : $y' - \dfrac{e^x}{e^x+1}y = 2x(e^x + 1)$

7.6 Avec condition initiale

a. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ et $y(1) = 1$ b. $y' - \ln(x)y = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 1$

c. $\mathrm{ch}(x)\, y' + \mathrm{sh}(x)\, y = 1 + x^2$ et $y(0) = 1$ d. $y' + 2y = \cos x + \sin x$ et $y(0) = 1$

e. $xy' + 2y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $y(1) = 1$

♥-♦ *EDL du 2^nd^ ordre à coefficients constants*

7.7 Résoudre:

(E_1) : $y'' - 4y' + 4y = 0$ (E_2) : $y'' - (1 + 2i)y' + 2iy = 0$ (E_3): $y'' - 3y' + 2y = 2x^2$
(E_4): $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ (E_5): $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{-x}$ (E_6): $y'' - 4y' + 13y = \cos(x)$
(E_7): $y'' + y = \cos(2x)$ (E_8): $y'' + 4y' + 5y = t\sin(t)e^{-2t}$

7.8 Avec conditions initiales
a. $y'' + y = 4x\sin x$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
b. $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
où ω et ω_0 désignent des réels strictement positifs distincts

---

Avec un paramètre

♥ **7.9** Soit m un réel
Résoudre (E_m): $my'' - (1+m^2)y' + my = t$, en fonction des valeurs de m.

♦ **7.10** Soit a un réel et (E_a) l'équation différentielle $y'' - 2ay' + y = e^x$

a. Résoudre l'équation homogène associée en fonction des valeurs du paramètre a.

b. Déterminer une solution particulière de (E) en distinguant les cas $a = 1$ et $a \neq 1$.

c. Conclure

Problèmes se ramenant à la résolution d'une EDL

7.11 Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x,y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x).f(y)$ (♣)

Ind: Il y a une solution évidente. Si f est une autre solution, déterminer f(0) et dériver (♣).

7.12 Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)\,dt = 0$

♦ **7.13** Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x$

7.14 Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = x$

On pourra utiliser les fonctions auxiliaires $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = f(x) - f(-x)$

Exemples de résolution d'autres types d'équations différentielles

7.15 Changement d'inconnue

Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation $x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$, en posant $z = x^2y$.

7.16 Une équation d'Euler, exemple de changement de variable.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^2y'' + xy' + y = 0$ en posant $x = e^t$

Mini Problème : recherche d'une solution maximale

On considère l'équation différentielle (E): $x(x^2+1)y' + y = -x$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$

2. Résoudre (E) sur $]0;+\infty[$.

on utilisera la méthode de variation de la constante.

3. Sans refaire tous les calculs donner les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$

4. Ecrire un script Python qui donne les courbes intégrales de cette équation

5. On veut montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

5.a. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Expliciter f sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

5.b. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire une expression de f(x) valable sur $\mathbb{R}$.

5.c. Conclure.