Programme de colles-semaine 11-11/12 au 15/12

I. Ensembles et applications

- Rappel sur les ensembles.
- Application: généralités et vocabulaire, fonction indicatrice d'une partie, restrictions et prolongement, image directe et réciproque, composition.
- Application injective : def, caractérisations, exemple, toute fonction strictement monotone sur une partie I de $\mathbb{R}$ est injective, la composée de deux injections est une injection, si la composée $g\circ f$ est injective alors f est injective.
- Application surjective : def, caractérisations, exemple, la composée de deux surjection est une surjection, si la composée $g\circ f$ est surjective alors g est injective.
- Application bijective : def, caractérisations, exemple, théorème de la bijection (rappel).
- Bijection réciproque : def, exemples, si il existe g telle que $f\circ g = Id$ et $g\circ f = Id$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$, cas particulier des involutions, la composée de deux bijections est une bijection et $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

II. Fonctions usuelles 2

- arccos, arcsin, arctan
- Applications : équations trigonométriques, calcul d'intégrales et de primitives

$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ et $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ en posant u = xa

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}dx$ en fonction des racines du dénominateur

---

Déroulement de la colle:

① Etude rapide de arcsin, arccos ou arctan

② Une question de cours parmi

- Définitions et caractérisations de f est une injection et f est une surjection exemples et contre-exemples.
- Définition de la bijection réciproque et preuve de :
si il existe g telle que $f\circ g = Id$ et $g\circ f = Id$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.
- Calcul de $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}dx$ sur un exemple

③ Exercice au choix du colleur.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Quelques exercices vus en TD :

8.11 Soit $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $\forall z\in\mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + z + 1$.
a. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$ et $f(\mathbb{R})$.
b. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.
c. f est-elle injective ? Surjective ?

♥ **8.16** Soit $f:E \to F$ une application. Montrer que: $\forall A, B\in\mathcal{P}(E)$, $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B) \Leftrightarrow f$ injective

8.17 Soit $f : E \to F$ une application.
a. Soit Y une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(E)$.
Que se passe t'il si f est surjective ?

b. Soit A une partie de E et B une partie de F. Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

♥ **9.4** Démontrer les égalités suivantes en précisant leur domaine de validité:

a. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ b. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ c. $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ e. $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ f. $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

♥ **9.5 Valeurs exactes:** Calculer:

$A = \cos(\arccos(1/3))$, $B = \sin(2\arccos(1/3))$, $C = \arccos(\cos(\pi/3))$

$D = \arccos(\cos(-\pi/3))$, $E = \arccos(\cos(10\pi/3))$, $F = \arccos(\cos(\pi/3 + k\pi))$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

9.6 Valeurs exactes, suite : Calculer :

$\alpha = \sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin(\dfrac{7}{25})\right)$ $\beta = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$ $\gamma = \arctan(2) + \arctan(3)$

9.9 Représenter les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{arcos}(\cos x)$ et $g(x) = \arcsin(\sin(2x))$