**Principe de récurrence et variantes**

---

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

• **Principe de récurrence:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right) \end{cases}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Vocabulaire:

★ Vérifier $\mathcal{P}(n_0)$ constitue l'**initialisation** du raisonnement par récurrence.

★ Une propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est dite **héréditaire**.

Attention: Une propriété peut être héréditaire et par ailleurs, fausse! L'étape d'initialisation est donc indispensable pour conclure.

★ Symboliquement, le principe s'écrit:

$$\boxed{[\mathcal{P}(n_0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \mathcal{P}(n)].}$$

Preuve : On pose $A = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 | \mathcal{P}(n) \text{ est fausse}\}$. On suppose que A est non vide.
Soit p le plus petit élément de A. On a $\mathcal{P}(p)$ est fausse et $p > n_0$ car $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
$p - 1 < p$ donc $(p-1) \notin A$ donc $\mathcal{P}(p-1)$ est vraie et $p - 1 \geq n_0$.
Comme P est héréditaire à partir de $n_0$, on en déduit que $\mathcal{P}(p)$ est vraie ce qui est absurde

---

• **Récurrence double:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)\right) \end{cases}$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Ce type de récurrence s'utilise lorsque la démonstration de l'hérédité nécessite l'utilisation des deux rangs précédents.

✍ Preuve : On montre par récurrence simple que la propriété $\mathcal{Q}(n)$ : $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

---

• **Récurrence forte:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \geq n_0, \left(\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0+1), \dots, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)\right) \end{cases}$

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Ce type de récurrence s'utilise lorsque la démonstration de l'hérédité nécessite l'utilisation de certains rangs compris entre $n_0$ et n ou même de tous.

✍ Preuve : On montre par récurrence simple que la propriété $\mathcal{Q}(n)$ : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

---

• **Récurrence finie:**

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } n \in [n_0, p-1], \text{si } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie, alors } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie} \end{cases}$

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, $n_0 \leq n \leq p$

Remarque: ce type de récurrence s'utilise lorsque la propriété à démontrer n'a plus de sens à partir du rang p + 1.

## Exercices

① Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

② Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$ .

Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

③ Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, une application injective.
Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N},\ f(n) \leq n) \Rightarrow f = Id_{\mathbb{N}}$.

④ Soit f: $\begin{cases} \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^* \\ (p,q) \mapsto 2^p(2q+1) \end{cases}$. Montrer que f est surjective.

⑤ On donne les deux propriétés suivantes où $n\in\mathbb{N}^*$:

P(n): $\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)!-1$ et Q(n): $\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)!$

a. Montrer que ces deux propriétés sont héréditaires pour tout $n\geq 1$.
b. Laquelle des deux est vraie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$?

⑥ Montrer que si une trousse contient n stylos alors ils sont tous de la même couleur.

 .......

**Réponse:** Soit P(n): Si une trousse contient n stylos alors il sont tous de la même couleur.
★ P(1) est trivialement vraie.
★ Soit $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 1$, tel que P(n) est vraie. Considérons une trousse contenant (n+1) stylos. On enlève un stylo, la trousse contient alors n stylos tous de la même couleur, par exemple rouge, par hypothèse de récurrence. Remettons le stylo et enlevons en un autre. les n stylos restants sont encore de la même couleur, par exemple encore rouge.
Ainsi les (n+1) stylos sont de la même couleur et P(n+1) est vraie
★ D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 1$, si une trousse contient n stylos alors ils sont tous de la même couleur.

Qu'en pensez-vous ?

---

♦ ⑦ Des récurrences plus difficiles

**a.** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

**b.** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

**c.** Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} > \frac{1}{n+1}$ .

**d.** Monter que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1}$ .

**Eléments de correction**

---

① ***Bien retenir la rédaction pour la récurrence double***

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ : $u_n = 2^n + 1$

• On a $u_0 = 2$ et $2^0 + 1 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
De même $u_1 = 3$ et $2^1 + 1 = 3$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$sont vraies.
On a $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$.
$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(2^{n+1} + 1) - 2(2^n + 1) = 3 + 1) = 3\times2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 2^{n+2} + 1$.
Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• CCl : D'après le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$

---

② ***Bien retenir la rédaction pour la récurrence forte***

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ : $u_n \le 2^n$.

• On a $u_0 = 1$ et $2^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$, …, $\mathcal{P}(n)$ sont vraies ou encore que
$\forall k\in[\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie

On a $u_{n+1} \le \sum_{k=0}^{n} u_k$

or, $\forall k\in[\![0, n]\!]$, $u_k \le 2^k$ ,en sommeant ces inégalités, on obtient

$\sum_{k=0}^{n} u_k \le \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \le 2^{n+1}$

Donc, par ransitivité de l'ordre, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• CCl : D'après le principe de récurrence forte, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \le 2^n$

---

⑦ ***Des récurrences simples demandant un peu de technique***

**a.** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

• Pour $n = 1$, l'égalité s'écrit $1 = 1$

• On suppose que l'égalité est vraie pour un entier n fixé dans $\mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \quad \textit{On utilise la formule de Pascal}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1} \quad \textit{On applique l'HR}$$

La formule du capitaine donne $\displaystyle\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$ et $\displaystyle\binom{n}{n+1} = 0$

On remplace dans le calcul.

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}+0+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{n+1}\times\binom{n+1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}}_{=0}-1\right)$$

En utilisant la formule du binôme, on arrive à $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$

L'égalité est donc vérifiée pour l'entier n + 1 ce qui achève la récurrence

---

**b.** Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Soit P($n$) : « $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ »

• <u>Initialisation :</u> on vérifie que P(1) est vraie car $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$.

• <u>Hérédité :</u> On suppose P($n$) vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On a : $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k}=\frac{2n+1}{2n+2}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient : $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k}\leq\frac{2n+1}{2n+2}\times\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$

Comparons $\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. Comme ces nombres sont positifs, il suffit de comparer leur carré.

On a : $\left(\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\right)^2=\frac{(2n+1)(2n+3)-(2n+2)^2}{(2n+2)^2(2n+3)}=\frac{-1}{(2n+2)^2(2n+3)}<0$

On a donc : $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k}\leq\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$ Et P($n$ + 1) est vraie.

• <u>Bilan :</u> ok !

**c.** Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\},\ \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}>\frac{1}{n+1}$ .

On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\},\ \alpha_n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

<u>Initialisation</u> pour $n$ = 2. Ok !

<u>Dans l'hérédité :</u> $\alpha_{n+1}=\frac{(2(n+1))!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}=\alpha_n\times\frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}=\alpha_n\times\frac{(2n+1)}{2(n+1)}>\frac{1}{n+1}\times\frac{(2n+1)}{2n+2}$ avec l'hyp. de récurrence.

Et en étudiant le signe de la différence, on montre que : $\frac{1}{n+1}\times\frac{(2n+1)}{2n+2}>\frac{1}{n+2}$ donc Ok !

**d.** Monter que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1)!\geq((n+1)!)^{n+1}$ .

Soit P($n$) : « $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)!\geq((n+1)!)^{n+1}$ »

• <u>Initialisation :</u> pour $n$ = 1. Ok !

• <u>Hérédité :</u> On suppose P($n$) vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Par hypothèse de récurrence : $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1}$ donc : $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)! \geq ((n+1)!)^{n+1}(2n+3)!$

Comparons $((n+1)!)^{n+1}(2n+3)$ et $((n+2)!)^{n+2}$ :

On a : $\dfrac{((n+1)!)^{n+1}(2n+3)!}{((n+2)!)^{n+2}} = \dfrac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)^{n+2}} = \dfrac{(n+2)(n+3)...(2n+3)}{(n+2)(n+2)...(n+2)} \geq 1$

Donc on obtient que P($n$ + 1) est vraie et la propriété est héréditaire.

• <u>Bilan :</u> ok !