Programme de colles-semaine 13-08/01 au 12/01

Suites numériques :

- Généralités : def et exemples de mode de génération : suite explicite, suite récurrente, sommes, produits, suite définie par une intégrale, suite implicite.
- Ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, opérations algébriques.
- Propriétés globales : suite majorée, bornée, constante, monotone, stationnaire.
- Suite convergente,: def, suites de référence, propriétés dont unicité de la limite.
- Limite infinie: def, suites de référence, propriétés.
- Opérations sur les limites, suites extraites, limite et ordre dont le passage à la limite dans une inégalité et le théorème des gendarmes.
- Théorèmes de convergence: théorème de la limite monotone, théorème des suites adjacentes.
- Suite récurrente linéaire d'ordre 1, d'ordre 2.

Déroulement de la colle:

① Etude 'une suite récurrente linéaire dordre 1 ou 2

② Démontrer l'une des propositions suivantes en s'appuyant sur un dessin

- Montrer que si (u_n) a pour limite $L\in\mathbb{R}$, alors cette limite est unique
- Montrer que si $\lim u_n = L$ et $\lim v_n = L'$ alors $\lim(u_n + v_n) = L + L'$
- Enoncé et démonstration du théorème de la limite monotone.
- Enoncé et démonstration du théorème des suites adjacentes.

③ Exercice sur les suites.
On pourra proposer des preuves nécessitant une récurrence double ou forte.

Evaluation: *Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10*

Quelques exercices vus en TD :

10.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle à valeurs entières. Prouver qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

♥ 10.11 Suite définie implicitement
Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0{,}7$.
1.a. Soit $n \geq 3$. Etudier les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition.
b. Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in\ ]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.
2.a. Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
En déduire que la suite (x_n) est monotone et donner son sens de monotonie.
b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
c. En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $x_n \to 1$.

♥ 10.15 On considère la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

a. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, que peut-on en déduire ?

b. Justifier que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$

c. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle = \ln 2 - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$ et déterminer $\lim S_n$.