Chapitre 10 : Suites numériques-résumé de cours

1. Généralités

1.1 Définition et exemples

Déf: On appelle **suite** toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si la suite est notée u, l'image de n est noté u_n plutôt que u(n). On notera indifféremment la suite u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Vocabulaire:.
Le terme u_0 est le premier terme de la suite u
u_n est le terme de rang n de la suite u ou encore le terme général de la suite u.
Le terme u_{n+1} est le terme qui suit le terme u_n
Le terme u_{n-1} est le terme qui précède le terme u_n

Notation: On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

On peut étendre la notion de suite à une famille de réels indexées à partir du rang p. La suite est alors noté $(u_n)_{n\geq p}$ et son premier terme est u_p. On adaptera les résultats qui suivent en remplaçant dans les énoncés $\forall n\in\mathbb{N}$ par $\forall n \geq p$.

Exemple de suite définie explicitement

Ce type de suite est de la forme $u_n = f(n)$, par exemple : $\forall n\geqslant 0$, $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Exemple de suite définie par récurrence

- Relation de récurrence simple: $u_0 = 4$ et pour tout $n\geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Ce type de suite est définie par son premier terme et une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$
- Relation de récurrence double ou plus: Suite de Fibonacci

$F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

Exemple de suite définie par une somme (ou un produit):

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \qquad \textit{série harmonique}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$$

Exemple de suite définie par une intégrale

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt \qquad \textit{Intégrales de Wallis}$$

Exemple de suite définie implicitement
Pour tout entier naturel n, on note x_n l'unique solution de l'équation $x + \ln(x) = n$ (E)

Représentation graphique :

1.2. Opérations algébriques sur les suites :

★ Addition dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: u + v est la suite de terme général u_n+v_n.
Elle est associative, commutative et son élément neutre est la suite nulle notée $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ ou $(0)_{n\in\mathbb{N}}$,

l'opposé de u est la suite de terme général $-u_n$.

★ Multiplication dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: uv est la suite de terme général u_nv_n
Elle est associative, commutative et son élément neutre est la suite constante égale à 1.
Elle est aussi distributive sur l'addition.

★ Multiplication par un scalaire: Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, la suite (λu) est la suite de terme général λu_n.
C'est une loi externe dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1.3 Comportement global d'une suite:

a) Suites majorées, minorées, bornées :

• On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq M$
ou encore $\exists M\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n \leq M$
Cela est équivalent à $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.

• On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq m$
ou encore $\exists m\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n \geq m$
Cela est équivalent à $\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.

• On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Proposition 10.1: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n| \leq \alpha$.

★ Méthodes de démonstration
• Etablir directement l'inégalité ou l'encadrement voulu.
• Etudier le signe des différences u_n - M et u_n - m.
• Si $u_n = f(n)$, on peut utiliser les propriétés de la fonction f.
• Démonstration par récurrence.

b) Suites monotones :

• On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **croissante** si et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$

• On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** si et seulement si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$

• On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

• On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite **constante** si et seulement si pour, tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = u_{n+1}$.

Proposition 10.2:
① Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
② Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

★ Méthodes de démonstration:
• Etude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
• Si les termes de la suite sont strictement positifs, comparaison du quotient u_{n+1}/u_n à 1.
• Si $u_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f.
• Démonstration par récurrence après conjecture du sens de variation.

c) Suites périodiques :

Déf: On dit qu'une suite est **périodique** de période $p\in\mathbb{N}^*$ lorsque $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$.

Exemple : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est le reste de n dans la division par 3.
On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_n$ donc cette suite est périodique de période 3.

d) Propriétés vraies à partir d'un certain rang, suites stationnaires

Déf: On dit qu'une suite u vérifie une propriété $\mathcal{P}$, **à partir d'un certain rang (APCR)** lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, u_n vérifie $\mathcal{P}$.

Exemple: On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** lorsqu' elle est constante APCR.
c'est à dire: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = u_{n+1}$

---

2. Limite d'une suite:

2.1 Suite convergente

Déf: On dit qu'une suite **u a pour limite un réel** ℓ lorsque

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon}$

Dans ce cas on dit que u a pour limite ℓ ou encore converge vers ℓ et on note $\lim u_n = \ell$ ou encore $u_n \to \ell$.

★ Remarque: Dans cette définition les inégalités peuvent être larges ou strictes sauf $\varepsilon > 0$.

Vocabulaire: Si u admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle est **convergente**, dans tous les autres cas on dit qu'elle est **divergente**.

Proposition 10.3: Propriétés des suites convergentes. Soit ℓ un réel

① Si une suite (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est unique et est LA limite de (u_n).

On peut donc noter $\lim u_n = \ell$ ou encore $u_n \to \ell$.

② $u_n \to \ell \Leftrightarrow (u_n - \ell) \to 0 \Leftrightarrow |u_n - \ell| \to 0$

③ Si une suite est convergente alors elle est bornée.

④ Si (u_n) converge vers ℓ alors $|u_n|$ converge vers $|\ell|$.

⑤ Si (u_n) converge vers $\ell > 0$ alors (u_n) est minorée par un réel strictement positif, APCR.

♥ **Suite convergentes de référence:**

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- Si $-1 < a < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$.
- Toute suite constante égale à ℓ converge vers ℓ.
- Toute suite stationnaire est convergente.

2.2 Limite infinie

Déf : Soit une (u_n) une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- On dit que **(u_n) a pour limite +∞** lorsque $\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A}$

On note alors $\lim u_n = +\infty$ ou encore $u_n \to +\infty$.

- On dit que **(u_n) a pour limite -∞** lorsque $\boxed{\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq B}$

On note alors $\lim u_n = -\infty$ ou encore $u_n \to -\infty$.

★ Remarques: Dans cette définition les inégalités peuvent être larges ou strictes.

♥ Suites de référence de limite infinie:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ avec $p \in \mathbb{N}^* \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$

Proposition 10.4: Propriétés des suites de limite infinie:
① Si $\lim u_n = +\infty$ alors u n'est pas majorée.
② Si $\lim u_n = -\infty$ alors u n'est pas minorée.

★ Remarque: Une suite qui tend vers $\pm\infty$ est divergente.

2.3 Opérations et limites

a) Somme

$\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$			$+\infty$		$-\infty$	
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	???	??	$-\infty$

Et aussi:
★ Si u est minorée et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$
★ Si u est majorée et si $\lim v_n = -\infty$ alors $\lim(u_n + v_n) = -\infty$

b) Produit

$\lim u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$		$\ell < 0$		0	$+\infty$		$-\infty$	
$\lim v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n . v_n)$	$\ell . \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	??	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Et aussi
★ Si u bornée et si $\lim v_n = 0$ alors $\lim(u_n v_n) = 0$
★ Si u minorée par $m > 0$ APCR et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim(u_n v_n) = +\infty$
★ Si u est majorée par $M < 0$ APCR et si $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim(u_n v_n) = -\infty$

c) Inverse

$\lim u_n$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim 1/u_n$	$1/\ell$	$+\infty$	$-\infty$	0

2.4 Utilisation de suites extraites

Def: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la suite (v_n) est une **suite extraite** de la suite u lorsqu'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante telle que:
$\forall n\in\mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi(n)}$.

Dans la pratique: On utilise le plus souvent les suites extraites suivantes: (u_{2n}) et (u_{2n+1})

Théorème 10.1: ℓ désigne un réel ou $\pm\infty$
① Si une suite u tend vers ℓ alors toute suite extraite de u tend aussi vers ℓ.
② Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers la même limite ℓ alors (u_n) tend aussi vers ℓ.

★ Dans la pratique:
On utilise souvent ① pour montrer que la suite est divergente:
On utilise ② pour montrer que la suite a pour limite ℓ.

2.5. Limite de suite et ordre dans $\mathbb{R}$:

Proposition 10.5: ℓ désigne un réel ou $\pm\infty$

① Si $\lim u_n = \ell$ avec $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ APCR

② Si $\lim u_n = \ell$ avec $\ell < 0$ alors $u_n < 0$ APCR

③ Si $\lim u_n = \ell$ avec $\ell \neq 0$ alors $u_n \neq 0$ APCR

Attention: les inégalités doivent être strictes

Proposition 10.6: Passage à la limite dans les inégalités
Soit u et v deux suites convergentes resp. vers ℓ et ℓ', si $u_n \leq v_n$ APCR, alors $\ell \leq \ell$

★ Remarque: Avant de "passer à la limite" il faut avoir prouvé la convergence.

⚠ Attention! Les inégalités strictes ne passent pas à la limite, elles deviennent larges.

Théorème 10.2 dit des gendarmes ou de convergence par encadrement:
Soit u, v et w trois suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et ℓ un réel.

Si, $v_n \leq u_n \leq w_n$ APCR et si $\lim v_n = \lim w_n = \ell$ alors u converge aussi vers ℓ.

Corollaire: Soit u et v, deux suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et ℓ un réel.

Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ APCR et $\lim v_n = 0$, alors la suite u converge vers ℓ.

Théorème 10.3 dit de divergence par comparaison : u et v désignent des suites
① Si $u_n \geq v_n$ APCR et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$
② Si $u_n \leq v_n$ APCR et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$

---

3. Deux théorèmes de convergence

3.1 Suites monotones

Théorème 10.4 dit de la limite monotone:
① Soit (u_n) une suite croissante
Si (u_n) est majorée alors elle converge vers sa borne supérieure.
Si (u_n) n'est pas majorée alors $\lim u_n = +\infty$.
② Soit (u_n) une suite décroissante
Si (u_n) est majorée alors elle converge vers sa borne inférieure.
Si (u_n) n'est pas minorée alors $\lim u_n = -\infty$.

⚠ Attention!!
- Ce théorème assure la convergence mais ne donne pas explicitement la limite.
- Si (u_n) est croissante et majorée par M alors (u_n) converge vers ℓ avec $\ell \leq M$.
- Il existe des suites convergentes non monotone: $u_n = (-0.5)^n$

★ Conséquence : Toute suite monotone admet une limite.
- Si (u_n) est croissante alors (u_n) converge ssi (u_n) est majorée. Sinon, $u_n \to +\infty$
- Si (u_n) est décroissante alors (u_n) converge ssi (u_n) est minorée. Sinon, $u_n \to -\infty$

3.2 Suites adjacentes

Def: Deux suites u et v sont dites **adjacentes** lorsque
① l'une est croissante et l'autre décroissante.
② $(u_n - v_n)$ converge vers 0

Théorème 10.5 dit des suites adjacentes:
Deux suites adjacentes u et v convergent vers la même limite ℓ.
De plus, si u croissante et v décroissante alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.

★ Cas particulier à connaître : Les approximations décimales par excès et par défaut d'un réel x_0 sont deux suites adjacentes de limite commune x_0.

Proposition 10.7 : Tout réel est la limite d'une suite de rationnels.

★ Remarque : Cette proposition permet d'affirmer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (cf TD)

---

4. Suites récurrentes linéaires

4.1 Récurrence linéaire d'ordre 1

Def : (u_n) est une suite arithmético-géométrique ou récurrente linéaire d'ordre 1 lorsqu'il existe deux réel a et b, tels que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b}$.

1^er^ cas: a=1 : u est une **suite arithmétique** de raison b.

On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq p$, $u_n = u_p + (n-p)b$ et $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

2^ème^ cas: a≠1 et b=0 : u est une **suite géométrique** de raison a.

On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq p$, $u_n = u_p a^{n-p}$ et $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-a^{n-p+1}}{1-a}$

3^ème^ cas: a ≠ 1 et b ≠ 0 : On note ℓ l'unique solution de l'équation $ax + b = x$

On montre que la suite v de terme général $u_n - \ell$ est géométrique de raison a.

On en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = (u_0 - \ell).a^n + \ell$

u converge ssi (a^n) converge ssi $|a| < 1$ ou $u_0 = \ell$ et dans tous les cas la limite est ℓ.

4.1 Récurrence linéaire d'ordre 2

Def : (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsqu'il existe deux réels a et b, $b\neq 0$, tels que $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n}$.

Théorème 10.6 (Admis provisoirement) : Soit une suite u telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
On considère l'équation caractéristique: $\boxed{r^2 - ar - b = 0\ (E_c)}$
① Si (E_c) admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors $\exists(A, B)\in\mathbb{R}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$
② Si (Ec) admet une racine double (r_0) alors $\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = (An + B)r_0^n$
② Si (Ec) admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ alors
$\exists(A, B)\in\mathbb{R}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$

★ Dans la pratique : On détermine les valeurs de A et B en utilisant les valeurs de u_0 et de u_1.

5. Relations de comparaison

5.1 Suite dominée, suite négligeable

Def: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\mathbb{N}}$ deux suites réelles:

• On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) et on note $u_n = O(v_n)$ si et seulement si il existe une suite bornée (b_n) telle que $u_n = b_n v_n$ APCR,

• On dit que (u_n) est un **négligeable** devant (v_n) et on note $u_n = o(v_n)$ si et seulement si il existe une suite (ε_n) convergente vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ APCR

Dans la pratique: On utilisera les caractérisations suivantes, valables lorsque $v_n \neq 0$ APCR

$$\boxed{u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée et } u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

Remarques :

★ Les écriture $u_n = O(v_n)$ et $u_n = o(v_n)$ ne sont pas réellement des égalités mais des appartenances.

★ $u_n = o(v_n)$ se note aussi $u_n \ll v_n$.

★ Il est clair que si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$

Proposition 10.8: u, v et w sont des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

• Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = O(w_n)$

• Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$

• Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$

♥ **Comparaison des suites de référence**: Soit α, β,a,b$\in\mathbb{R}$

$(\ln(n))^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha, \beta > 0$	$n^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha < \beta$
$n^\alpha = o(a^n)$ si $\alpha > 0$ et $a > 1$	$(a^n) = o(b^n)$ si $0 < a < b$
$a^n = o(n!)$ si $a > 1$	$n! = o(n^n)$

★ On obtient une échelle de comparaison des suites de limite $+\infty$:

$$(\ln(n))^\alpha \ll n^\beta \ll n^\gamma \ll a^n \ll b^n \ll n\,! \ll n^n \text{ avec } 0 < \alpha < \beta < \gamma \text{ et } 1 < a < b$$

Proposition 10.9 : **Compatibilité avec les opérations**: Soit u, v, x et y des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

① Combinaison linéaire : $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $\left.\begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right\} \Rightarrow au_n + bv_n = o(w_n)$

② Produit: $\left.\begin{array}{l} u_n = o(x_n) \\ v_n = o(y_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n v_n = o(x_n y_n)$

③ Puissances: Si (u_n) et (v_n) strictement positives APCR alors $u_n = o(v_n) \Rightarrow \forall\alpha > 0, u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$

④ Inverse: Si (u_n) et (v_n) non nulles APCR, alors $u_n = o(v_n) \Rightarrow \dfrac{1}{v_n} = o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$

Ces résultats restent vrais pour la relation de domination.

★ On obtient une échelle de comparaison des suites de limite nulle:

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{a^n} \ll \frac{1}{n^\beta} \ll \frac{1}{(\ln(n))^\alpha}$$

5.2 Suites équivalentes :

Def: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\mathbb{N}}$ deux suites réelles .On dit que (u_n) est **équivalente à** (v_n) et on note $u_n \sim v_n$ si et seulement si il existe une suite (a_n) convergente vers 1 telle que $u_n = a_n.v_n$ APCR

Dans la pratique: On utilisera les caractérisations suivantes:

① $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n) \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ ② Si $v_n \neq 0$ APCR, alors $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$

Proposition 10.10 : Soit u, v et w trois suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

① $u_n \sim u_n$
Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$
Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$

② Si un converge vers ℓ avec $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq$ **0**, alors $u_n \sim \ell$.

③ Si $u_n \sim v_n$ et si v_n admet une limite alors u_n admet la même limite

④ Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe strict APCR

Attention : $u_n \sim 0$ signifie que (u_n) est nulle APCR.
Aboutir à ce résultat, est en général la conséquence d'une erreur de raisonnement !

Proposition 10.11 Compatibilité avec les opérations: Soit u,v,x et y des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- Multiplication par un scalaire: $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ u_n \sim v_n \Rightarrow \lambda u_n \sim \lambda v_n$
- Produit: $\left.\begin{matrix} u_n \sim x_n \\ v_n \sim y_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_n v_n \sim x_n y_n$
- Puissance: Si (u_n) est strictement positive APCR, $u_n \sim v_n \Rightarrow \forall \alpha > 0, u_n^{\alpha} \sim v_n^{\alpha}$
- Inverse: Si (u_n) non nulle APCR, $u_n \sim v_n \Rightarrow \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$

Attention!!

★ **On ne peut ni sommer, ni soustraire, les équivalents** : Pour donner un équivalent d'une somme, on pourra utiliser la caractérisation : si $x_n = y_n + z_n$ avec $z_n = o(y_n)$ alors $x_n \sim y_n$ ou bien on transformera la somme en produit.

★ **En général, $u_n \sim v_n$ n'implique pas $f(u_n) \sim f(v_n)$.**
Sauf pour la fonction logarithme dans un cas précis (cf TD)

Proposition 10.12: Soit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $f'(0) \neq 0$.

Si $u_n \to 0$ alors $(f(u_n) - f(0)) \sim f'(0)u_n$

♥ On en déduit les équivalents suivants valables pour toute suite **(u_n) de limite nulle**:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ (1+u_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha u_n$ *α est ici une constante*

$\sin(u_n) \sim u_n$	$\tan(u_n) \sim u_n$	$1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$	
$\ln(1 + u_n) \sim u_n$	$\exp(u_n) - 1 \sim u_n$	$\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$	$\mathrm{th}(u_n) \sim u_n$
$\arctan(u_n) \sim u_n$	$\arcsin(u_n) \sim u_n$		

Proposition 10.13: ***Equivalent par encadrement :*** Soit u, v, x et α des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ , APCR} \\ v_n \sim a_n \\ w_n \sim a_n \end{cases}$ alors $u_n \sim \alpha_n$

---

6. Extension aux suites de nombres complexes :

On appelle suite de nombres complexes toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.
On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites complexes.

Def: Soit (z_n) une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on lui associe les suites réelles suivantes
$R_n = \mathrm{Re}(z_n)$ $I_n = \mathrm{Im}(z_n)$ $D_n = |z_n|$

On pourra se ramener à ces suites pour l'étude de (z_n).

Def: Soit (z_n) une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
- (z_n) est bornée lorsque (D_n) est bornée ce qui signifie que : $\exists R \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq R$
- (z_n) converge vers ℓ lorsque $(|z_n - \ell|)$ converge vers 0

On note $\boxed{\lim z_n = \ell}$

Figure : Illustration dans le plan complexe

Remarques :
★ Pas de monotonie!!!
★ Une suite non convergente est divergente, pas de notion de limite infinie.
★ Les opérations sur les limites finies restent valables.

Proposition 10.14: Soit (z_n) une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
① Si (z_n) converge alors (z_n) est bornée.
② Si $\lim z_n = \ell$ alors alors $\lim |z_n| = |\ell|$ et $\lim \overline{z}_n = \overline{\ell}$.
③ $\lim z_n = \ell \Leftrightarrow \lim R_n = \lim \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim I_n = \lim \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(\ell)$

Def: (t_n) est une suite extraite de (z_n) ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = z_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Les résultats sur les suites extraites restent valables.