Exercices – Chapitre 10: Suites numériques.

♥ A savoir refaire- ♦ Corrigé

Révisé le 09 janvier 2023

♥ *Comportement global*

10.1 Etudier la monotonie des suites suivantes :

a. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\right) - n$ **b.** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{e^n}{n}$ **c.** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}$, $\alpha\in]0\,;\pi[$

d. $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ **e.** $u_0 = 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}$

10.2 Soit (u_n) une suite bornée de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit la suite v par :
$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \sup_{p\geq n} u_p$ et $w_n = \inf_{p\geq n} u_p$. Montrer que ces deux suites sont monotones.

10.3 Démontrer que les suites suivantes sont bornées

a. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$ **b.** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ **c.** $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n + \sin(n)}{\cos(n)+3}$

Limite d'une suite

10.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle à valeurs entières. Prouver qu'elle est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

10.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle qui converge vers 0. On définit, $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} u_k$.

Montrer, avec la définition que $v_n \to 0$.

♦ **10.6** Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positives telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ avec $\ell\in\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\ell \geq 0$

b. On suppose que $\ell\in[0,1[$, montrer que (u_n) converge.

c. On suppose que $\ell > 1$, montrer que (u_n) est divergente.

d. Montrer avec des exemples que si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

♥ **10.7** Etudier la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants

a. $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n + 3| \leq \frac{1}{n^2}$ **b.** $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n > n - \ln(n)$ **c.** u croissante et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n < \frac{n+2}{n+1}$

♥ **10.8** Déterminer la limite des suites suivantes dont on donne le terme général :

a. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **b.** $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ **c.** $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$

d. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$ **e.** $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$ **f.** $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(2 - \frac{k}{2n}\right)$

g. $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$ **h.** $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor k\sqrt{2}\right\rfloor$

♥ **10.9 *Suites extraites***

a. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = n\cos(n\frac{\pi}{3})$. Montrer que u n'admet pas de limite.

b. On considère une suite u telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, montrer que u converge.

♦ **10.10** On s'intéresse aux suites de termes généraux $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$.
a. Montrer que si u converge ou v converge alors u et v convergent.
Ind: On pourra supposer que $\lim u_n = \ell$ *et calculer* u_{n+1}.

b. Montrer par l'absurde que ces deux suites sont divergentes
Ind: On pourra exploiter les relations reliant u et v.

♥ **10.11 Suite définie implicitement**
Pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout réel $x > 0$, on pose : $f_n(x) = x - n \ln x$. On donne : $\ln(2) \approx 0{,}7$.
1.a. Soit $n \geq 3$. Etudier les variations de la fonction f_n sur son ensemble de définition.
b. Soit $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]1, 2[$ tel que : $f_n(x_n) = 0$.
2.a. Soit $n \geq 3$. Déterminer le signe de $f_n(x_{n+1})$.
En déduire que la suite (x_n) est monotone et donner son sens de monotonie.
b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
c. En utilisant que pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(x_n) = 0$, montrer que : $x_n \to 1$.

10.12 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que **A est dense dans $\mathbb{R}$,** si, pour tout réels x et y tels que $x < y$, il existe $a\in A$, $a\in]x, y[$.
1. On suppose que A est dense dans $\mathbb{R}$, et on considère un réel x_0.
1.a. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe une réel a_n de A tel que $a_n \in \left]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right[$

1.b. Justifier que x_0 est la limite d'une suite à valeurs dans A.
2. Etudier la réciproque.
3. En utilisant l'équivalence démontrée ci-dessus, montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Suites adjacentes

♦ **10.13 Moyenne arithmético-géométrique**.
Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Leur moyenne arithmétique est $\frac{a+b}{2}$ et leur moyenne géométrique $\sqrt{ab}$.

a. Montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

b. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$.

Montrer que ces suites sont adjacentes,
Leur limite commune est la moyenne arithmético-géométrique et a et de b.

♥ **10.14 *e est un irrationnel***

On considère la suite u définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$, montrer que u et v sont adjacentes puis justifier que u converge vers une limite L.

b. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$ et en déduire une expression de I_n en fonction de u_n

c. Montrer que $I_n \to 0$ et en déduire la valeur de L

b. En utilisant les questions précédentes, montrer que $e \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

♥ **10.15** On considère la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

a. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, que peut-on en déduire ?

b. Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = = \ln 2 - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ et déterminer lim S_n.

__Récurrence linéaire__

♥ **10.16** Etudier les suites suivantes et préciser leurs limites si elles existent.

a. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - \sqrt{3}u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = i \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$

d. $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 6 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} u_n} \end{cases}$

♦ **10.17** Soit les suites u et v telles que $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

a. Montrer que u est une suite linéaire récurrente d'ordre 2

b. Expliciter u_n et v_n.