Exercices – Chapitre 10: Suites numériques partie 2

♥ *A savoir refaire-* ♦ *Corrigé*

Relation de comparaison

10.18 Démontrer les propriétés suivantes, lorsque $n\to+\infty$

a. $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **b.** $\left(1+\frac{2}{n}\right)^2=1+\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

c. $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **d.** $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

♥ **10.19** Compléter les pointillés avec $n\ln(n)$, n^2, n, $\sqrt{n}\ln(n)$, $\frac{\ln(n)}{n}$.

$$\ldots\ldots \ll \ldots\ldots \ll \ldots\ldots \ll \ldots\ldots \ll \ldots\ldots$$

Recommencer avec $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n\ln(n)}$, $\frac{\ln(n)}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{\ln(n)}{n^2}$

10.20 Compatibilité avec les opérations

a. Justifier que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $\left(2+\frac{3}{n}\right)^2=4+\frac{12}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$.

b. Déterminer α telle que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{3}{n}\right)^2=5+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

c. Déterminer β telle que $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\times\left(2+\frac{3}{n}\right)^2=4+\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

♥ **10.21** Donner un équivalent simple de u_n

a. $u_n=\frac{n^2-2}{n^2+n}$ **b.** $u_n=n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ **c.** $u_n=\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n^2+n}}$

d. $u_n=\frac{(e^{1/n}-1)^2}{(n+1)^3-n^3}$ **e.** $u_n=n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ **f.** $u_n=\sin\left(\frac{n+2}{n^2-1}\right)$

g. $u_n=\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+n}\right)$ **h.** $u_n=\cos(e^{-n})-1$ **i.** $u_n=\sin\frac{1}{n}-\tan\frac{2}{n}$

j. $u_n=\binom{n}{k}$ avec k fixé dans $\mathbb{N}^*$.

♥ **10.22 Equivalent d'une somme**

Donner un équivalent simple de $s_n=\sum_{k=0}^{n}2^k$ puis de $S_n=\sum_{k=1}^{n}k!$

♥ **10.23 Equivalent d'une suite implicite**

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique réel u_n solution de $x^n - nx + 1 = 0$ dans $[0,1]$.
Etudier la monotonie de u et montrer qu'elle converge vers 0.
Donner un équivalent simple de u_n

♦ **10.24 Equivalent d'une suite récurrente**

Soit la suite u définie par récurrence de la manière suivante par $u_1 = 1$ et $\forall n\geq 2$, $u_n=\sqrt{n+u_{n-1}}$

a. Donner u_2 et u_3

b. Démontrer que $\forall n\geq 1$, $u_n\leq\sqrt{2n+1}$

c. Déterminer un équivalent de u_n

10.25 Equivalent d'une suite définie par une intégrale : *On considère*, $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$.

a. Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{n+1}R_n$ où $\lim R_n = 0$.

b. En déduire la limite et un équivalent de I_n.

♥ **10.26** Préciser la limite de u_n en utilisant des équivalents ou des comparaison

a. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

b. $u_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n^2}$

c. $u_n = \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$

d. $u_n = \dfrac{n^2+\cos(n)}{2^n+n\sin(n)}$

e. $u_n = \sqrt{n}\sin\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$

f. $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

g. $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1}(2-\frac{k}{2n})$

h. $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n+1}u_n$

Problèmes

Problème 1: Lemme de Cesàro, et applications

1. Etant donné une suite $(u_n)_{n\geq 1}$, on définit $(v_n)_{n\geq 1}$ en prenant pour v_n la moyenne arithmétique des n premiers termes de u, soit $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$

a. Dans cette question, on suppose que u converge vers 0.

Montrer que: $\forall\varepsilon > 0, \exists N\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left|v_n\right| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left|u_k\right| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

En déduire que v converge aussi vers 0.

b. Que se passe-t-il pour la suite v si u converge vers $\ell\in\mathbb{R}^*$?

On pourra considérer $w_n = u_n - \ell$

♦ **c**. On suppose que $u_n \to +\infty$. Montrer que : $\forall A\in\mathbb{R}_+, \exists N\in\mathbb{N}^*, \forall n \geq N, v_n \geq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}u_k + \dfrac{n-N}{n}3A$

En déduire que $v_n \to +\infty$. A-t-on le même résultat si $u_n \to -\infty$?

d. Montrer que l'on peut trouver un exemple où u est divergente et v convergente.

e. Enoncer une proposition résumant les questions précédentes.

2. Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{\sqrt{k}})}$

3. Soit (u_n) une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers $\ell\in\mathbb{R}^*$.

a. Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge vers ℓ.

b. En déduire un équivalent de u_n.

c. Enoncer une proposition résumant les questions précédentes.

d. Soit (w_n) définie par : $w_0 > 0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + \dfrac{1}{w_n}$

- **i.** Etudier la monotonie de (w_n) et sa limite éventuelle.
- **ii.** Montrer que la suite $(w_{n+1}^2 - w_n^2)$ est convergente et déterminer sa limite.
- **iii.** Déterminer un équivalent simple de w_n.

Problème 2 : Deux suites implicites

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on considère l''équation (E_n) : $x = \ln x + n$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, E_n admet deux solutions sur $]0, +\infty[$.
Dans la suite du problème, on note x_n la plus petite et y_n la plus grande de ces deux solutions.

2.a. Etudier le sens de variation de (x_n) puis montrer que $x_n \to 0$
2.b. Justifier que $x_n \sim e^{-n}$
2.c. On pose $u_n = x_n - e^{-n}$. Montrer que $u_n \sim e^{-2n}$.
2.d. En déduire que $x_n = e^{-n} + e^{-2n} + o(e^{-2n})$

3.a. Justifier que $y_n \to +\infty$
3.b. Justifier que $y_n \sim n$
3.c. Montrer que $y_n = n + \ln(n) + o(\ln(n))$

Problème 3 : Une suite complexe

On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \neq 0$

b. On pose $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ où $\theta_n \in]-\pi, \pi]$.
Ecrire des relations de récurrence pour les suites réelle $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis leurs expressions en fonction de r_0, θ_0 et n.

c. Démontrer que la suite (r_n) converge.
Ind: sin(2a) =....donc cos(a) =.....

d. Quelle est la nature de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prolongations exceptionnelles :