Programme de colles-semaine 15 - 22/01 au 26/01

I. Suites numériques.

II. Limites et continuité d'une fonction numérique

- Propriété vraie au voisinage de a .
 - Limite d'une fonction définie sur I en $a \in I$ ou borne de I : écritures des 9 cas avec les quantificateurs, unicité de la limite, si f admet une limite finie en a alors f bornée au vois de a , si f admet une limite $\ell > 0$ alors f minorée par une constante $k > 0$ au vois de a .
 - Limite à droite et à gauche de a , limite en a pour f définie sur $I \setminus \{a\}$.
 - Caractérisation séquentielle de la limite.
 - Continuité en a , prolongement par continuité en a .
 - Limite d'une suite image.
 - Opérations sur les limites.
 - Limites et ordre: Passage à la limite dans les inégalités, théorème des gendarmes, théorème de comparaison, théorème de la limite monotone pour les fonctions.
 - Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues, continuité des fonctions usuelles.
 - Propriétés de fonctions continues sur I : Théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de la bijection continue.
-

Déroulement de la colle:

- ① Donner une des neuf définitions de la limite de f en a et illustrer graphiquement.
 - ② Calcul d'une limite de suite nécessitant l'utilisation d'un équivalent
 - ③ Une question de cours parmi les suivantes :
 - Énoncé de la caractérisation séquentielle de la limite et utilisation pour montrer que f n'admet pas de limite en a sur un exemple.
 - Démonstration de la propriété de Cauchy : Si f est continue sur I et change de signe sur I alors f s'annule sur I (dichotomie)
 - Énoncé et illustration du théorème des bornes atteintes et proposer un exemple d'application
 - ④ Exercice au choix du colleur.
- Nous n'avons pas encore traité d'exercices d'application de la continuité sur un intervalle.
-

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Quelques exercices vus en TD :

11.2 Donner les limites suivantes, si elles existent:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \lfloor x \rfloor)$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \lfloor x \rfloor)$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor} \right)$

11.5 Trouver toutes les fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.

♥ **11.6** Dire si on peut prolonger f par continuité en 0 dans les cas suivants :

$$f : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

$$f : x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$$

$$f : x \mapsto e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$f : x \mapsto \cos \frac{1}{x}$$

$$f : x \mapsto \sin x \cos \frac{1}{x}$$

♥ **11.8** On veut déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et continues en 0 telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

a. Démontrer que si f convient alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$

b. En déduire que si f convient, f est constante et conclure.

♥ **11.12** Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad g : x \rightarrow \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \quad \text{et} \quad h : x \rightarrow \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

11.14 Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ notée $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser la suite des approximations décimales d'un réel