Chapitre 11- Limites et continuité d'une fonction numérique-résumé.

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux réels.
$\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ désigne les fonctions définies sur I à valeurs réelles.
a désigne un réel de I ou une borne de I, éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$, et ℓ est un élément de $\mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$.

0. Notion de voisinage

Def : Soit $f\in\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et a un réel de I ou une borne de I et $\mathcal{P}$ une propriété portant sur f.
- On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de a lorsque il existe un réel $h > 0$ tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $]a - h, a + h[\cap I$.
- On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de $+\infty$ lorsque il existe un réel A tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $]A, +\infty[\cap I$.
- On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de $-\infty$ lorsque il existe un réel A tel que $\mathcal{P}$ est vraie sur $]-\infty, A[\cap I$.

★ Exemples:
- On dit que $M = f(a)$ est un maximum (resp. minimum) local de f si f(a) est le maximum (resp. minimum) de f au voisinage de a c'est-à-dire $\exists h > 0, \forall x\in]a - h, a + h[\cap I, f(x) \leq f(a)$
- f est positive au voisinage de 1 signifie : $\exists h > 0, \forall x\in]1 - h, 1 + h[\cap I, f(x) \geq 0$

1. Limites d'une fonction numérique, continuité en un point.

1.1 Définitions et propriétés immédiates:

Déf: Soit $f\in\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, avec $a\in I$ ou bien a est borne de I et ℓ un réel.

① Cas où $a = +\infty$.

- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si

$\forall\varepsilon > 0, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ (*)

ou encore $\forall\varepsilon > 0, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x\in[x_0, +\infty[\Rightarrow f(x)\in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si

$\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A$ (*)

ou encore $\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x\in[x_0, +\infty[\Rightarrow f(x)\in[A, +\infty[$

- On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si

$\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$

ou encore $\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x\in[x_0, +\infty[\Rightarrow f(x)\in]-\infty, A]$

② Cas où $a = -\infty$

- On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ si

$\forall\varepsilon > 0, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x \leq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

ou encore $\forall\varepsilon > 0, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x\in]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x)\in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

- On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si

$\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \geq A$ (*)

ou encore $\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x\in]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x)\in[A, +\infty[$

- On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$

$\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq A$

ou encore $\forall A\in\mathbb{R}, \exists x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in I, x\in]-\infty, x_0] \Rightarrow f(x)\in]-\infty, A]$

③ Cas où $a \in \mathbb{R}$

• On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a si
$\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ (*)
ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$
• On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow f(x) \geq A$ (*)
ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in [A, +\infty[$
• On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a si
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow f(x) \leq A$
ou encore $\forall A \in \mathbb{R}, \exists h > 0, \forall x \in I, x \in [a - h, a + h] \Rightarrow f(x) \in]-\infty, A]$

Proposition 11.1 : Si f admet une limite en a selon l'une des définitions précédentes alors cette limite est unique et on note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\to} \ell$ ou encore $\lim_a f = \ell$

Interprétation graphique :
★ Lorsque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, la droite y = ℓ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f.
★ Lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ avec a réel, la droite x = a est asymptote verticale à la courbe représentative de f.
★ Lorsque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, la courbe représentative de f possède une branche infinie dont il faut étudier la nature (revoir le chapitre 3).

Proposition 11.2 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, a un réel de I ou une borne de I, ℓ un réel évent. $\pm\infty$.
① Si $\ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \left(f(x) - \ell\right) = 0$
② Si $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} f(a + h) = \ell$
③ Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ avec a réel, alors f est bornée au voisinage de a.
④ Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$
⑤ Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ avec $\ell > 0$ ou $\ell = +\infty$, alors f est strictement positive au voisinage de a

1.2 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 11.1 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, a un réel de I ou une borne de I et ℓ un réel évent. $\pm\infty$.
$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall u \in I^{\mathbb{N}}, \lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell)$

Dans la pratique:
★ Si f a pour limite ℓ en a alors, pour toute suite (u_n) à valeurs dans I, $\lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = \ell$
Par exemple, si $u_n \to -\infty$ alors $\exp(u_n) \to 0$
★ Pour montrer qu'une fonction f définie sur I n'a pas de limite en a, il suffit de:
trouver deux suites u et v à valeurs dans I telles que $\lim u_n = \lim v_n = a$ et $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$.

✍ Montrer que la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$.

1.3 Limite à droite et limite à gauche

Def: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, a un réel de I ou une borne de I, ℓ un réel évent. $\pm\infty$.
① f a pour limite ℓ à droite de a lorsque la restriction de f à $I \cap]a,+\infty[$ admet pour limite ℓ en a
Pour $\ell \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, x \in]a; a + \alpha] \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$

② f a pour limite ℓ <u>à gauche</u> de a lorsque la restriction de f à $I\cap]-\infty;a[$ admet pour limite ℓ en a.
Pour $\ell\in\mathbb{R}$: $\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in I, x\in[a-\alpha;a[\Rightarrow f(x)\in[\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon]$

Notations: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim\limits_{a+} f = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{a-} f = \ell$

Remarque: Si a est une borne de I, par exemple a = inf(I), alors la notion de limite en a se confond avec la notion de limite à droite de a et on peut noter $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou lieu de $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Proposition 11.3: Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, a un réel de I mais pas une borne de I, ℓ un réel évent. $\pm\infty$.
Si f a pour limite ℓ en a alors f admet ℓ comme limite à droite et à gauche de a
ou encore: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$.

Attention: La réciproque est fausse.

Def : Soit f est définie sur I\{a}, si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$ alors on dit que f admet ℓ comme limite en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

1.4 Continuité en a réel

Théorème 11.2 et définition : Soit f définie sur I et a un réel de I.
Si f admet une limite ℓ en a alors ℓ = f(a) et dans ce cas on dit que f est continue en a.

Remarque : On a les caractérisations suivantes
★ f est continue en a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
★ f est continue en a $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists h>0, \forall x\in I, |x-a|\le h \Rightarrow |f(x)-f(a)|\le\varepsilon$
★ f est continue en a $\Leftrightarrow$ ($\forall u\in I^{\mathbb{N}}$, $\lim u_n = a \Rightarrow \lim f(u_n) = f(a)$ °

Def : Soit f définie sur I et a un réel de I
① Si a ≠ sup(I), on dit que f est <u>continue à droite</u> de a lorsque $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$
② Si a ≠ inf(I), on dit que f est <u>continue à gauche</u> de a lorsque $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$

Exemple : Montrer que $f : x \mapsto x\lfloor x\rfloor - 1$ est continue en 0. Soit $n\in\mathbb{Z}$, est-elle continue en n ?

Remarque : Si a n'est pas une borne de I, f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite de a.

1.5 Prolongement par continuité en a.

Def : Soit f définie sur I\{a}. Si f admet une limite ℓ en a, alors on peut prolonger f par continuité sur I en posant $\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x\neq a \\ \ell \text{ sinon}\end{cases}$. La fonction $\tilde{f}$ est continue en a.

Remarques :
★ f définie sur I\{a} admet une limite finie en a ssi f est prolongeable par continuité en a.
★ Si un tel prolongement existe, il est unique

Exemple: Soit $f: x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$. Peut-on prolonger f par continuité sur [0, +∞[?

2. Outil de calcul des limites d'une fonction

2.1 Opérations sur les limites

Proposition 11.4: Soit f et $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ a un réel de I ou une borne de I.
Si g est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = 0$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$

Proposition 11.5 Soit f et g des fonctions définies sur I, a un réel de I ou une borne de I, ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$.

① Somme

$\lim\limits_a f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f+g)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

② Produit

$\lim\limits_a f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_a (f \times g)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

③ Quotient

$\lim\limits_a f$	ℓ	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0
$\lim\limits_a g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\limits_a (f / g)$	ℓ/ℓ'	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

$\lim\limits_a f$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_a g$	$\ell'>0$ ou 0^+	$\ell'<0$ ou 0^-	$\ell'>0$ ou 0^+	$\ell'<0$ ou 0^-	$\pm\infty$
$\lim\limits_a (f / g)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Preuve : La caractérisation séquentielle de la limite permet de déduire ses propriétés de celles des limites de suites.

Attention: Ce tableau traduit des implications: Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \ell'$ alors $\lim(f+g) = \ell+\ell'$

Proposition 11.6: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$

2.2 Limites et ordre:

Proposition 11.7: Soit f et g∈$\mathcal{F}$(I, ℝ) admettant toutes les deux une limite finie en a∈I ou borne de I.
Si f ≤ g (♠) au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Attention :
On dit qu'on passe à la limite dans (♠). Ceci n'est possible qu'après avoir établi l'existence des deux limites.
Une inégalité stricte (f < g) devient large par passage à la limite.

Théorème des gendarmes pour les fonctions: Soit f, g et h∈$\mathcal{F}$(I, ℝ), a∈I ou borne de I et ℓ∈ℝ.
Si g ≤ f ≤ h au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Corollaire: Soit f et g ∈$\mathcal{F}$(I, ℝ), a∈I ou borne de I et ℓ∈ℝ.
Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\lfloor x \rfloor - 1}{x^2} = 1$

Théorème de comparaison pour les fonctions: Soit f et g ∈$\mathcal{F}$(I, ℝ), a ∈I ou borne de I.
① Si f ≤ g au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$
② Si f ≤ g au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin x + x^2\right) = +\infty$

2.3 Limites des fonctions monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite monotone pour les fonctions: Soit f une fonction définie et croissante sur un intervalle ouvert I =]a, b[et ℓ un réel.
① Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b : $\lim\limits_{b} f = \sup\limits_{I} f$
Sinon, $\lim\limits_{b} f = +\infty$
② Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a : $\lim\limits_{a} f = \inf\limits_{I} f$
Sinon, $\lim\limits_{a} f = -\infty$

Remarque : Cette proposition s'adapte au cas où f est décroissante sur]a, b[.

Conséquence: Si f est croissante sur]a, b[et si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \ell$ alors ∀x∈]a, b[, f(x) ≤ ℓ

Corollaire: Si f est une fonction croissante sur I =]a, b[alors f admet en tout point x_0 de]a, b[une limite à droite et à gauche en x_0 vérifiant: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

★ Remarque : Cette proposition s'adapte au cas où f est décroissante sur]a, b[.

3. Continuité sur un intervalle

3.1 Définition

Def: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.
ou encore $\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

Notations: On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Exemples: $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^n$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto e^x$ sont continues sur leur ensemble de définition

Contre-exemple : la fonction partie entière est continue sur tout intervalle $]n, n + 1[$ où $n \in \mathbb{Z}$.
Elle est en revanche discontinue en tout point n de $\mathbb{Z}$.

Remarque: Si f est continue sur I alors, pour tout intervalle J inclus dans I, la restriction de f à J est encore continue.

3.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 11.8: Soit f et g continue sur I.
① Si f et g sont continues sur I alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)$ est continue sur I.
② Si f et g sont continues sur I alors $(f \times g)$ est continue sur I.
③ Si f et g sont continues sur I et si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, (f/g) est continue sur I.

Conséquences:
★ Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire des fonctions puissances entières.
★ Les fonctions rationnelles et la fonction tan sont continues comme quotient de fonctions continues sur tout intervalle où elles sont définies.

Proposition 11.9: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.

Conséquences:
★ ch, sh sont continues sur leur ensemble de définition.
★ Si f est continue sur I, alors $|f|$ est continue sur I.

3.3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.

a) Le théorème des valeurs intermédiaires

T.V.I version 1: Soit f une fonction continue sur I. S'il existe a et b dans I tels que $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule au moins une fois sur I cad $\exists c \in I, f(c) = 0$

T.V.I version 2: Soit f une fonction continue sur I et $a, b \in I$.
Pour tout réel λ compris entre f(a) et f(b) il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$ ou encore $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution sur I.
f prend donc toutes les valeurs intermédiaires entre f(a) et f(b)

T.V.I version 3: Si f est continue sur un intervalle I alors f(I) est un intervalle.

Remarque: *Ces 3 versions sont équivalentes et appelées indistinctement Théorème des Valeurs Intermédiaires.*

✍ Exercices:
- Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
- Si f est continue sur I et ne s'annule pas sur I alors f garde un signe constant sur I.

b) Fonction continue sur un segment [a, b]:

Théorème des bornes atteintes: Si f est continue sur I = [a, b], alors f est bornée et atteint ses bornes, ou encore :
$\min_I f$ et $\max_I f$ existe et il existe c et d dans I tels que $\min_I f = f(c)$ et $\max_I f = f(d)$

Conséquence: On a f([a, b]) = [m, M] donc l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

c) Bijection continue

Théorème de la bijection continue: Si f est continue et strictement monotone sur I alors
- J = f(I) est un intervalle.
- f réalise une bijection de I dans J
- f^{-1} est continue sur J, strictement monotone sur J, de même monotonie que f

Rappel: La représentation graphique de f^{-1} est l'image de celle de f par la symétrie d'axe y = x
Applications: ln (et par composition $x \mapsto x^\alpha, x \mapsto a^x$), arcsin, arccos et arctan sont continues sur les intervalles où elles sont définies.

---

4. Extension rapide aux fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ ou borne de I et $\ell \in \mathbb{C}$.
|.| désigne le module.

Déf: On dit que f a pour limite ℓ en a lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists h > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq h \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Conséquence : Si f admet une limite ℓ en a alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition 11.10: f admet pour limite ℓ en a ssi Re(f) admet pour limite Re(ℓ) et Im(f) admet pour limite Im(ℓ) en a.

Conséquences: Tous les résultats sur les limites vus dans ce chapitre restent valables sauf les résultats concernant l'ordre.

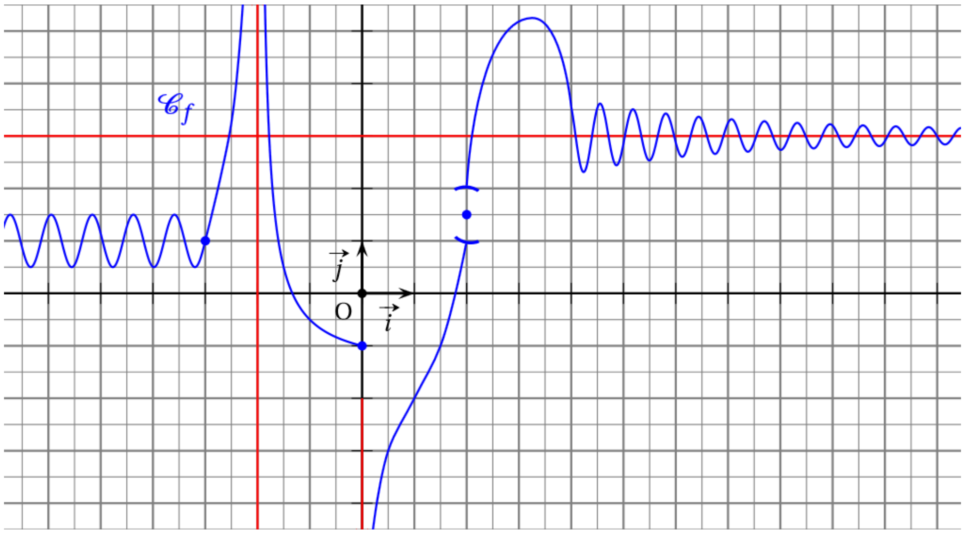
Def: Soit $a \in I$, f est continue en a lorsque f admet une limite en a nécessairement égale à f(a).
On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Proposition 11.11: f est continue en a ssi Re(f) et Im(f) sont continues en a.

★ Conséquence: la somme, le produit par un scalaire, le produit , le quotient et la composée (si ils existent) de deux fonctions continues est continue.

Chapitre 11- Limites et continuité d'une fonction numérique-résumé.

Annexe 1 : On donne, ci-dessous, l'allure de $\mathcal{C}_f$ courbe représentative d'une fonction f :



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. Déterminer, si elles existent, les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

3. Sur quels intervalles, la fonction f est-elle continue ?

Annexe 2 : Démonstration du théorème des bornes atteintes – HP

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Préliminaire: Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, on pose $M = \sup(A)$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $(M - \frac{1}{n+1})$ ne majore pas A donc $\exists a_n\in A$, $M - \frac{1}{n+1} < a_n < M$.

Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers $M = \sup(A)$.

Démonstration du théorème:

On pose $J = f([a,b])$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On pose M la borne supérieure de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ et m sa borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On va montrer que M et m sont deux réels de J

• Montrons que J est majoré:

Par l'absurde, on suppose que $J = f(I) = \{f(x), x\in I\}$ n'est pas majoré.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble $E_n = \{x \in I, f(x) \geq n\}$ est non vide et minoré (car $E_n \subset I$). D'après le résultat préliminaire il existe une suite $(x_{n,p})$ d'éléments de E_n telle que $\lim\limits_{p\to+\infty} x_{n,p} = x_n$.

De plus, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $E_n \subset I = [a, b]$. On a donc : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2$, $x_{n,p}\in I = [a, b]$.
Donc, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n \in I = [a, b]$.
Or par hypothèse, la fonction f est continue sur [a, b], donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est continue en x_n. On a donc : $\lim\limits_{p\to+\infty} f(x_{n,p}) = f(x_n)$.

De plus, on a : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2$, $x_{n,p}\in E_n$. Ainsi, on a : $\forall (n, p)\in\mathbb{N}^2$, $f(x_{n,p}) \geq n$
Donc, en passant à la limite quand p tend vers $+\infty$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(x_n) \geq n$.
Par comparaison, on obtient: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ (♦)

On remarque que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $E_{n+1} \subset E_n$ donc on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\inf E_{n+1} \geq \inf E_n$.
C'est-à-dire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1} \geq x_n$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Or on a vu que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in [a, b]$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in I = [a, b]$ donc $\ell\in[a, b]$ et ainsi, f est continue en ℓ.
On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)\in\mathbb{R}$. Ce qui contredit (♦)(OUF!)

Bilan : L'ensemble J est majoré et donc $M = \sup J\in\mathbb{R}$.

De même, on montre que l'ensemble J est minorée et donc que $m = \inf J\in\mathbb{R}$.

• Montrons que: $M\in J$:

Le résultat préliminaire assure l'existence d'une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $M - \frac{1}{n+1} < \alpha_n \leq M$.

Comme $J = f(I)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists\, \beta_n\in I$, $\alpha_n = f(\beta_n)$ et on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $M - \frac{1}{n+1} < f(\beta_n) \leq M$.

Ainsi, l'ensemble $F_n = \{ x\in I, M - \frac{1}{n+1} < f(x) \leq M \}$ est non vide et minorée (car $F_n\subset I$ et I est minoré)

donc F_n admet une borne inférieure et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x_n = \inf F_n$.

Comme dans le point précédent, on montre que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in F_n$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers un réel $\ell'\in I = [a, b]$.

Comme, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n\in F_n$, on a : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $M - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq M$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = M$

Or la fonction f étant continue en ℓ', on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell') \in \mathbb{R}$.

Par unicité de la limite, on a donc : $M = f(\ell') \in J = f(I)$ CQFD !

De même, on montre que : $m \in J$.

Annexe 3 : Démonstration du théorème de la bijection continue.

- Le théorème des valeurs intermédiaires assure que f(I) est un intervalle.

- Par construction, la fonction $\tilde{f} : I \to J = f(I)$ est surjective.

De plus, comme f est strictement monotone, la fonction $\tilde{f}$ est injective de I dans J.

On a donc que $\tilde{f}$ réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et on peut définir sa bijection réciproque $\tilde{f}^{-1} : J \to I$. Dans la suite de la démonstration, on confond f et $\tilde{f}$.

- Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante sur I.

Montrons que : f^{-1} est strictement croissante sur J.

Soit $(y, y') \in J^2$ tel que $y < y'$ (♥). On pose : $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$.

Si $x \geq x'$, comme f est strictement croissante sur I, on a : $f(x) \geq f(x')$, c'est-à-dire $y \geq y'$, ce qui est contraire à (♥), donc, nécessairement, on a : $x < x'$, c'est-à-dire : $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ et ainsi f^{-1} est strictement croissante sur J.

Montrons que : f^{-1} est continue sur J.

Soit $b \in J = f(I)$. Montrons que f^{-1} est continue en b c'est-à-dire que $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose : $a = f^{-1}(b)$. On se place dans le cas où a n'est pas une borne de I, les autres cas se traitent de façon similaire.

On peut alors choisir ε assez petit pour avoir $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset I$. *faire un dessin.*

On cherche à montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :
$\forall y \in J \cap, y \in b - \eta, b + \eta [\Rightarrow | f^{-1}(y) - f^{-1}(b) | < \varepsilon$.

Comme f est croissante sur I, on a :

$|f^{-1}(y) - f^{-1}(b)| < \varepsilon \Leftrightarrow f^{-1}(b) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(b) + \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < f^{-1}(y) < a + \varepsilon \Leftrightarrow f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon)$ (♠)

On cherche donc à montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :
$\forall y \in J, y \in]b - \eta, b + \eta[\Rightarrow f(a - \varepsilon) < y < f(a + \varepsilon)$.

On a : $a - \varepsilon < a$ et f est strictement croissante sur I, donc on a : $f(a - \varepsilon) < f(a) = b$
d'où : $\exists \eta_1 > 0, b - \eta_1 = f(a - \varepsilon)$.

On a : $a < a + \varepsilon$ et f est strictement croissante sur I, donc on a : $f(a) = b < f(a + \varepsilon)$
d'où : $\exists \eta_2 > 0, b + \eta_2 = f(a + \varepsilon)$.

On pose : $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. On a : $f(a - \varepsilon) = b - \eta_1 \leq b - \eta < b < b + \eta \leq b + \eta_2 = f(a + \varepsilon)$.

On a donc: $[b - \eta, b + \eta] \subset [f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)] \subset f(I)$ (car f (I) est un intervalle de $\mathbb{R}$).

C'est-à-dire que pour tout y de f(I), on a: $y \in [b - \eta, b + \eta] \Rightarrow y \in [f(a - \varepsilon), f(a + \varepsilon)]$

En utilisant (♠), on a donc: $\exists \eta > 0, \forall y \in f(I), y \in [b - \eta, b + \eta] \Rightarrow | f^{-1}(y) - f^{-1}(b) | \leq \varepsilon$

On a donc : $\lim\limits_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$ et f^{-1} est continue en b. (C'EST GAGNE !)

CCl: f^{-1} est continue sur l'intervalle J.
