

Chapitre 12: Dérivabilité d'une fonction numérique - résumé de cours

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux réels.

f désigne une fonction définie sur I et a un réel de I , ainsi f est définie en a .

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

$\overset{\circ}{I}$ désigne l'intervalle ouvert de même borne que I .

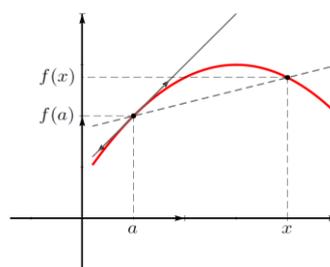
1. Dérivée première

1.1 Dérivabilité en a

Rappel! Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le taux d'accroissement de f en a .

Def: Soit f définie sur I et $a \in I$.

① Si $a \neq \sup(I)$, on dit que **f est dérivable à droite de a** lorsque τ_a admet une limite finie à droite de a . Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé à droite de a noté $f'_d(a)$.



② Si $a \neq \inf(I)$, on dit que **f est dérivable à gauche de a** lorsque τ_a admet une limite finie à gauche de a . Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé à gauche de a noté $f'_g(a)$.

③ Si $a \in \overset{\circ}{I}$ on dit que **f est dérivable en a** lorsque f est dérivable à droite et à gauche de a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$ ssi τ_a admet une limite finie en a .

Lorsque c'est le cas, cette limite est le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$.

④ Si $a = \sup(I)$ (resp. $\inf(I)$) f est dérivable en a lorsque f est dérivable à gauche (resp. à droite) de a .

★ Interprétation graphique :

- Si f dérivable en a , la droite $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est, par définition, la tangente à la courbe C_f au point $A(a, f(a))$.

- Si f n'est pas dérivable en a , on peut avoir les cas suivants:

- Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) de a alors C_f admet en A une demi-tangente de pente $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).
- Si τ_a admet une limite infinie en a avec f continue en a (resp à droite ou à gauche de a) alors C_f admet une tangente (resp. demi-tangente) verticale en A .
- Si τ_a admet des limites à droite et à gauche de a différentes alors A est un point anguleux de C_f .

Théorème 12.1: Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

f est dérivable en a **si et seulement si** il existe un réel α et une fonction ε définie sur I telle que

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0. (*)$$

Dans ce cas, $\alpha = f'(a)$

★ Vocabulaire: $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est la **meilleure approximation affine de f en a**.

Ainsi pour x proche de a on peut remplacer $f(x)$ par $f(a) + f'(a)(x-a)$, l'erreur commise étant négligeable devant $(x-a)$: Pour $|x| \ll 1$, $\sin x \approx x$, ; $\tan x \approx x$ et $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$

★ Remarque: Pour tout réel h tel que $(a+h) \in I$, on peut poser $x = a+h$ dans (*), on obtient : $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Cette écriture est appelé **développement limité d'ordre 1 de f en a**.

Corollaire: Si f est dérivable en a alors f est continue en a

⚠ Attention: réciproque fausse.

1.2 Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée.

Def: f est **dérivable sur I** lorsqu'elle est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, la fonction définie sur I par $a \mapsto f'(a)$ est la **fonction dérivée** de f notée f' (ou $\frac{df}{dx}$ ou Df).

Notation: On note $\mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I .

Proposition 12.1: Soit f et $g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

① $(f+g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(f+g)' = f' + g'$ $(\lambda f) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$

② $(fg) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(fg)' = f'g + fg'$

③ Si $\forall x \in I, g(x) \neq 0$, $(f/g) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$

④ Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ avec $f(I) \subset J$, $g \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

1.3 Dérivabilité de la bijection réciproque

Proposition 12.2: Soit $f : I \rightarrow J$ bijective et a un réel de I .

Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

★ Interprétation graphique: Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $(y = x)$.

Lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors la courbe représentative de f^{-1} admet une tangente verticale au point d'abscisse $f(a)$ de coefficient directeur $\frac{1}{f'(a)}$.

Lorsque f est dérivable en a avec $f'(a) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $b = f(a)$ et sa courbe représentative admet une tangente horizontale au point d'abscisse b .

Corollaire :

Soit $f : I \rightarrow J$ bijective, dérivable sur I et a un réel de I .

Si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

2. Dérivées successives, fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I .

2.1 Dérivée d'ordre n , classe d'une fonction.

Def: On pose $f^{(0)} = f$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I , alors f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

$f^{(n)}$ est la dérivée nième, ou d'ordre n , de f , on peut aussi noter $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $D^n f$.

★ Remarques:

- $f^{(1)}$ est la dérivée première notée plutôt f' et $f^{(2)}$ est la dérivée seconde notée plutôt f'' .
- Si f est n fois dérivable sur I alors f est k fois dérivable sur I pour tout $k \leq n$.

★ Vocabulaire et notations : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivable sur I .
- On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I avec $f^{(n)}$ continue sur I , de telles fonctions sont de classe \mathcal{C}^n sur I .
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur I .
- Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I alors f est dérivable à tout ordre ou **indéfiniment dérivable** sur I , ces fonctions sont de classe \mathcal{C}^∞ .

Résumé sur les ensembles de fonctions :

$$\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R}) \supset \dots \supset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}).$$

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I) \quad f \in \mathcal{C}^\infty(I) \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, f^{(k)} \in \mathcal{C}^{n-k}(I).$$

2.2 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n

Proposition 12.3: Soit f et $g \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\textcircled{1} (f + g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \text{ et } (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad (\lambda f) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \text{ et } (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

$$\textcircled{2} (f \cdot g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \text{ et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \quad \text{Formule de Leibniz}$$

$$\textcircled{3} \text{ Si } \forall x \in I, g(x) \neq 0, (f/g) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}).$$

$$\textcircled{4} \text{ Soit } f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \text{ et } g \in \mathcal{C}^n(J, \mathbb{R}) \text{ avec } f(I) \subset J, g \circ f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$$

★ Remarque: Ces théorèmes restent valables si on remplace \mathcal{C}^n par \mathcal{C}^∞ .

2.3 Classe de la bijection réciproque

Proposition 12.4 : Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ et f^{-1} est de classe \mathcal{C}^n sur J .

★ Vocabulaire: f est de classe \mathcal{C}^n , bijective avec f^{-1} de classe \mathcal{C}^n est un \mathcal{C}^n -difféomorphisme.

3. Théorèmes sur les fonctions dérivables:

3.1 Dérivée et extremum

Théorème 12.2: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in \overset{\circ}{I}$.
Si f est dérivable en a et si $f(a)$ est un extremum local alors $f'(a) = 0$.

✎ Attention: Réciproque fausse.

★ Dans la pratique: Les extrema locaux d'une fonction sont à chercher là où sa dérivée s'annule, aux bornes de I et en ses points de non dérivabilité.

3.2 Accroissements finis et conséquences

Théorème de Rolle: Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$
Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

★ Graphiquement: existence d'une tangente horizontale entre les points A et B d'abscisses a et b .

Exercice résolu : Soit f une fonction C^n sur I , montrer que si f s'annule en $(n+1)$ points distincts de I alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I .

Théorème des accroissements finis: Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, avec $a < b$.
Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

★ Graphiquement: existence d'une tangente parallèle à la corde (AB) entre A et B .

Corollaire 1: Inégalités des accroissements finis: Soit f continue sur un intervalle I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$.

- ① Si $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$
- ② Si $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$
- ③ Si $|f'|$ est bornée par M sur $\overset{\circ}{I}$ alors $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

Def : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et k un réel, $k > 0$.

On dit que f est k -lipschitzienne sur I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

On dit que f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe $k > 0$ tel que f est k -lipschitzienne sur I

★ Vu en TD : Si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I .

★ Conséquences des accroissements finis

- Si $|f'|$ est bornée par k sur $\overset{\circ}{I}$ alors f est k -lipschitzienne
- Si f est de classe C^1 sur $I = [a, b]$ alors f' est bornée et f est lipschitzienne sur I .

Corollaire 2: Variations d'une fonction dérivable: Soit f continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- ① f est croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$
- ② f est constante sur I ssi $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$
- ③ f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur $\overset{\circ}{I}$ sauf éventuellement en des points isolés de $\overset{\circ}{I}$.

★ Dans la pratique: Attention de bien appliquer ces résultats sur un intervalle.

3.3 Obtention de la dérivabilité par passage à la limite dans $f'(x)$

Théorème de la limite de la dérivée : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

- ① Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- ② Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty \in \mathbb{R}$, alors f n'est pas dérivable en a et C_f admet une tangente verticale au point d'abscisse a

⚡ Attention: Aucune notion de prolongement ici, f est définie en a , et on ne prolonge pas la dérivée : $f'(a)$ existe ou pas !

★ Remarque : Avec comme hypothèse f est de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$, on obtient f de classe C^1 sur I . En effet, f est alors dérivable en a donc sur I et comme $f'(a)$ est donnée par la valeur de la limite de $f'(x)$ en a , f' est continue en a donc continue sur I .

4. Fonctions convexes :

Def: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- f est convexe sur I lorsque $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
- f est concave sur I lorsque $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

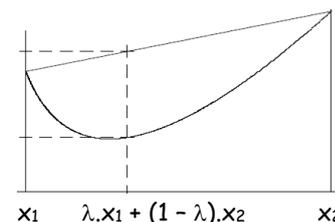
Remarques: f est concave sur I ssi $-f$ est convexe sur I .

Interprétation graphique :

- La courbe représentative d'une fonction convexe est située en-dessous de ses cordes.
- La courbe représentative d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes.

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$



⚡ Exercice : Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur \mathbb{R}

Proposition 12.5 - lemme des trois pentes: Soit f une fonction convexe sur I et $(a, b, c) \in I^3$ tels que $a < c < b$. On a $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$

⚡ Exercice : Illustrer graphiquement cette propriété

Proposition 12.6: Soit f définie sur I

- ① Si f est dérivable sur I alors (f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I). Dans ce cas ; la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes.
- ② Si f est deux fois dérivable sur I alors (f est convexe ssi $f''(x) \geq 0$)

Remarque : Ses résultats sont à adapter dans le cas où f est concave sur I en utilisant que $-f$ est convexe sur I .

Vocabulaire : Si f est deux fois dérivable sur I , en un point a où sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe, la courbe représentative de f change de concavité. On dira que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion.

☒ Inégalités de convexité à connaître :

a. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

c. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$

5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes.

Ici la notation $|\cdot|$ désigne le module.

Déf: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement τ_a admet une limite dans \mathbb{C} en a . Si c'est le cas, on note $f'(a)$ cette limite.

Proposition 12.5: Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, $a \in I$. f est dérivable en a ssi $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en a et $f'(a) = (\operatorname{Re}(f))'(a) + i(\operatorname{Im}(f))'(a)$.

★ Conséquences:

- On peut étendre les règles de calcul des dérivées.
- On peut étendre la notion de dérivées successives et on note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^n sur I à valeurs complexes.

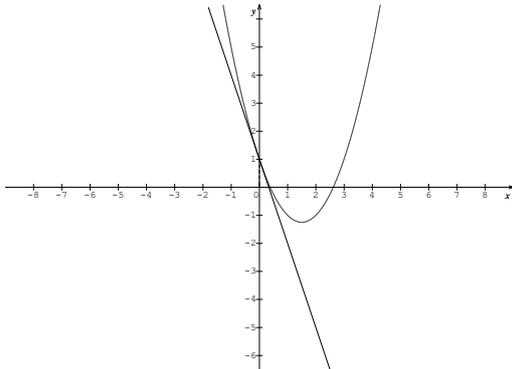
Proposition 12.6: Inégalité des accroissements finis: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, continue et dérivable sur $]a, b[$. Si il existe un réel M tel que: $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M \cdot |b - a|$.

Conséquence: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, dérivable sur I , f constante sur I ssi $f' = 0$ sur I

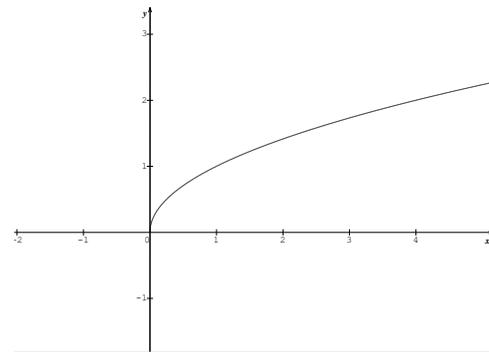
⚡ Attention: On n'a plus le théorème de Rolle, ni l'égalité des accroissements finis.

Annexe 1 : Exemples d'étude de la dérivabilité en $a = 0$

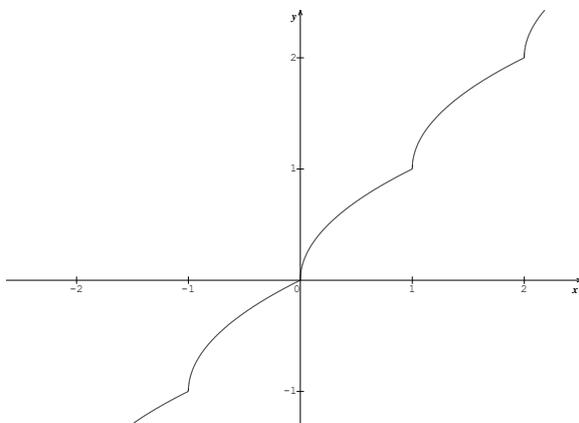
$$f: x \mapsto x^2 - 3x + 1$$



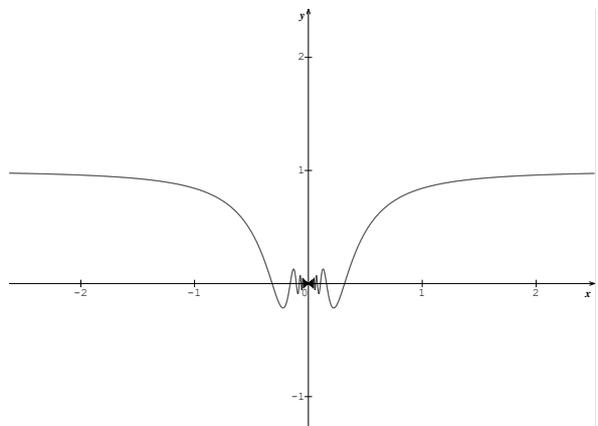
$$f: x \mapsto \sqrt{x}$$



$$f: x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$



$$f: x \mapsto x \sin \frac{1}{x} \text{ et } f(0) = 0$$



Annexe 2 : Dérivées successives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$	commentaires
x^α Si $\alpha = p \in \mathbb{N}$	$\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$ $\begin{cases} \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} & \text{si } n \leq p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$	Par suite si f une fonction polynômiale de degré p alors pour tout $n \leq p$, $f^{(n)}$ est une fonction polynômiale de degré $p - n$ et pour tout $n > p$, $f^{(n)} = 0$.
$e^{\alpha x}$	$\alpha^n e^{\alpha x}$	α est un réel ou un complexe.
$\cos(x)$	$\cos(x + n \frac{\pi}{2})$	
$\sin(x)$	$\sin(x + n \frac{\pi}{2})$	
$\frac{1}{x-a}$	$(-1)^n \frac{n!}{(x-a)^{n+1}}$	Reste valable pour $a \in \mathbb{C}$.
$\ln x-a $	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x-a)^n}$	$n \geq 1$
$u(ax+b)$	$a^n \cdot u^{(n)}(ax+b)$	Avec u de classe C^n

Les six premières fonctions sont de classe C^∞ sur les intervalles où elles sont définies

Annexe 3 : Deux démonstrations de la proposition 12.1 donnant la dérivabilité de $g \circ f$.

On suppose que f est dérivable sur I , g est dérivable sur J avec $f(I) \subset J$.

Pour tout réel a de I , on a f dérivable en a , puisque $a \in I$, et g dérivable en $b = f(a)$ puisque $b \in f(I)$ donc $b \in J$. On va démontrer que $h = g \circ f$ est dérivable en a avec $h'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Méthode 1 : A l'aide des taux d'accroissement.

- Soit $x \in I$, $x \neq a$. deux cas sont à envisager :

1^{er} cas : $f(x) \neq f(a)$.

$$\text{Dans ce cas, } \tau_{h,a}(x) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\text{On pose } y = g(x), \text{ on a } \tau_{h,a}(x) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \tau_{g,b}(y) \times \tau_{f,a}(x)$$

2^{ème} cas : Si $f(x) = f(a)$

$$\text{dans ce cas, } \tau_{h,a}(x) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = 0 \text{ et } \tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \text{ donc l'égalité}$$

$$\tau_{h,a}(x) = \tau_{g,b}(y) \times \tau_{f,a}(x) \text{ reste vraie.}$$

Bilan : $\forall x \in I \setminus \{a\}, \tau_{h,a}(x) = \tau_{g,b}(y) \times \tau_{f,a}(x)$ avec $y = f(x)$ et $b = f(a)$.

• Comme f est dérivable en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \tau_{f,a}(x) = f'(a)$.

Comme f est dérivable en a , f est également continue en a donc quand $x \rightarrow a$, $y = f(x) \rightarrow b$ donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} \tau_{g,b}(y).$$

Or g est dérivable en b donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = g'(b) = g'(f(a))$.

Ainsi par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow a} \tau_{h,a} = f'(a) \times g'(f(a))$.

On a donc, par définition : $g \circ f$ est dérivable en tout réel a de I et $h'(a) = g'(a) \times g'(f(a))$.

Méthode 2 : A l'aide du développement limité d'ordre 1 (Théorème 12.1) :

f est dérivable en a donc il existe $\varepsilon_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$ et

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon_1(x).$$

f est dérivable en $b = f(a)$ donc il existe $\varepsilon_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{y \rightarrow b} \varepsilon_2(y) = 0$ et

$$\forall y \in J, g(y) = g(b) + (y-b)g'(b) + (y-b)\varepsilon_2(y). (\spadesuit)$$

Or $\forall x \in I, f(x) \in J$, donc on peut poser $y = f(x)$ dans (\spadesuit) :

$$\forall x \in I, g(f(x)) = g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + (f(x) - f(a))\varepsilon_2(f(x)).$$

D'après (\spadesuit) , $\forall x \in I, f(x) - f(a) = (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall x \in I, g(f(x)) &= g(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))g'(f(a)) + (x-a)(f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x)). \\ &= g(f(a)) + (x-a)f'(a)g'(f(a)) + (x-a)[\varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))] \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x)g'(f(a)) + (f'(a) + \varepsilon_1(x))\varepsilon_2(f(x))$. ε est définie sur I , étudions sa limite en a :

Par hypothèse: $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_1(x) = 0$

De plus f est dérivable en a donc continue en a , par suite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b$ et donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon_2(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} \varepsilon_2(y) = 0.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

D'après le théorème 12.1, $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

Conclusion : $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.