

Exercices – Chapitre 11: Limites et continuité

♦ Éléments de correction en ligne - ♥ A savoir refaire

Limites, continuité en un point, prolongement par continuité.

♦ 11.1 Montrer que

a. $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$ on pourra transformer $\cos(x) - \cos(x_0)$

b. $\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$

11.2 Donner les limites suivantes, si elles existent:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \lfloor x \rfloor)$

e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \lfloor x \rfloor)$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor} \right)$

♦ 11.3 Etudier la limite en 0 des fonctions $f: x \mapsto \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$ et de $g: x \mapsto \frac{a}{x} \left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor$ avec $a > 0$ et $b > 0$.♥ 11.4 Déterminer, si elle existe, la limite de f en a :

$f: x \mapsto \frac{e^{3x} + 2x^2}{e^{2x} + 1}$ en $a = \pm \infty$ $f: x \mapsto e^{-x} \cos x$ en $a = \pm \infty$ $f: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ en $a = 0$

$f: x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$ en $a = 1$ $f: x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$ en $a = -1$ $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} - x$ en $a = \pm \infty$

11.5 Trouver toutes les fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.♥ 11.6 Dire si on peut prolonger f par continuité en 0 dans les cas suivants:

$f: x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

$f: x \mapsto \left\lfloor \frac{x}{x} \right\rfloor$

$f: x \mapsto e^{\frac{1}{x^2}}$

$f: x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$f: x \mapsto \cos \frac{1}{x}$

$f: x \mapsto \sin x \cos \frac{1}{x}$

♦ 11.7 Donner le domaine de définition de $f: x \mapsto \exp\left(\frac{\ln x}{\ln x - 1}\right)$ ainsi que ses limites aux bornes de ce domaine. Peut-on prolonger f par continuité?♥ 11.8 On veut déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et continues en 0 telles que:
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ a. Démontrer que si f convient alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ b. En déduire que si f convient, f est constante et conclure.11.9 Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1, vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$.Montrer que f est constante puis étudier la réciproque.♦ 11.10 Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 avec $g(0) = 1$ et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = g(x)\cos(x)$. Déterminer g **Continuité sur un intervalle**♥ 11.11 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes:

$$f: x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$g: x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et

$h: x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

♥-♦ 11.12 Donner le domaine de continuité des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \arcsin(1 + \ln x) \quad g : x \mapsto \sqrt{\arccos(x) - \pi/2} \quad h : x \mapsto \ln(1 + \tan(x))$$

11.13 Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ notée $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
On pourra utiliser la suite des approximations décimales d'un réel

11.14 On définit sur $[0, 1]$ par $\forall x \in [0, 1], f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

- Etudier la continuité de f sur $[0, 1]$
- Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

♥ 11.15 Fonctions lipschitziennes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et k un réel, $k > 0$.

On dit que f est k-lipschitzienne sur I lorsque $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

On dit que f est lipschitzienne sur I lorsqu'il existe $k > 0$ tel que f est k -lipschitzienne sur I .

- Donner des exemples de fonctions lipschitziennes
- Montrer que les fonctions suivantes sont lipschitziennes sur I :
sinus sur $I = \mathbb{R}$ et racine carrée sur $I = [1; +\infty[$
- Justifier que la fonction carrée n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, et qu'il en est de même pour la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.
- Montrer qu'une fonction lipschitzienne sur I est continue sur I .

♦ 11.16 Soit f une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

11.17 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Montrer que f est majorée et atteint sa borne supérieure.

♥ 11.18 Soit f définie sur $I = [a, b]$ avec I stable par f , c'est à dire $\forall x \in I, f(x) \in I$.

- Démontrer que si f est continue alors $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$. c est un **point fixe** de f .
- Que dire de plus si f est k -lipschitzienne avec $0 < k < 1$?

11.19 Montrer que si f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ alors elle admet un unique point fixe.

11.20 Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}], f(x_n + \frac{1}{n}) = f(x_n) \quad \text{On pourra calculer } \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

♦ 11.21 Un flâneur fait une ballade de 10 km en 4h, justifier qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant lequel il a parcouru exactement 5km.

11.22 Démontrer qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x)e^{f(x)} = x$.

Etudier ensuite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln x}$.

Pour chercher.

11.23 Dans cet exercice, on cherche toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (\clubsuit)$$

- Montrer que si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = g(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$
- Soit f une fonction solution de $(\clubsuit)$, montrer successivement que :
 f est impaire $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x) \quad \quad \forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = rf(1)$
- Résoudre l'équation fonctionnelle $(\clubsuit)$.

11.24 Montrer qu'on définit bien une fonction en posant : $\forall x > 0, f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$

puis étudier la continuité de f .

On pourra fixer $x_0 > 0$ et s'intéresser à la monotonie de $u_n = \frac{x_0^n}{n!}$