Programme de colles-semaine 16 - 29/01 au 02/02

I. Limites et continuité d'une fonction numérique

- Propriété vraie au voisinage de a.
- Limite d'une fonction définie sur I en $a \in I$ ou borne de I: écritures des 9 cas avec les quantificateurs, unicité de la limite, si f admet une limite finie en a alors f bornée au vois de a, si f admet une limite $\ell > 0$ alors f minorée par une constante $k > 0$ au vois de a.

minorée par une constante $k > 0$ au vois de a.

- Limite à droite et à gauche de a, limite en a pour f définie sur $I \setminus \{a\}$.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Continuité en a, prolongement par continuité en a.
- Limite d'une suite image.
- Opérations sur les limites.
- Limites et ordre: Passage à la limite dans les inégalités, théorème des gendarmes, théorème de comparaison, théorème de la limite monotone pour les fonctions.
- Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues, continuité des fonctions usuelles.
- Propriétés de fonctions continues sur I: Théorème des valeurs intermédiaires, théorème des bornes atteintes, théorème de la bijection continue.

II. Dérivabilité d'une fonction numérique.

- Dérivabilité en a, dérivabilité à droite et à gauche, interprétation graphique : tangente et demi-tangente.
- f est dérivable en a ssi il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, de limite nulle en a et $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$.

Dans ce cas, $f'(a) = \alpha$ et $x \to f(a) + f'(a)(x-a)$ est la meilleure approximation affine de f en a.

- Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, opération sur les dérivées, dérivation de la composée, de la bijection réciproque.
- Dérivées successives, fonctions de classe C^n, de classe C^∞. Opérations sur les fonctions de classe C^n, de classe C^∞, formule de Leibniz, dérivées successives des fonctions usuelles.
- Si f est de classe C^n sur I et telle que $f'(x) \neq 0$ sur I alors f induit une bijection de I sur f(I) et f^{-1} est de classe C^n sur f(I).
- Théorèmes sur les fonctions dérivables:
  - ★ Si f dérivable en a avec f(a) extremum local alors $f'(a) = 0$.
  - ★ Théorème de Rolle

Déroulement de la colle:

① Etudier la continuité/la dérivabilité d'une fonction.

② Une question de cours parmi les suivantes :

- Démonstration de la propriété de Cauchy : Si f est continue sur I et change de signe sur I alors f s'annule sur I (*dichotomie)*
- Enoncé de la formule de Leibniz et utilisation sur un exemple.
- Enoncé, illustration et preuve du théorème de Rolle
- Donner une dérivée nième à connaître (au verso) et justifier.

③ Exercice au choix du colleur la continuité et la dérivabilité.

La notion de densité a été vue en TD, les élèves savent que tout réel est la limite d'une suite de rationnels, la suite par défaut étant celle des approximations décimales.

Nous n'avons pas encore vu les relations de comparaison pour les fonctions.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Annexe 2: Dérivées successives des fonctions usuelles

f(x)	**$f^{(n)}(x)$**	**commentaires**
x^{α} Si $\alpha = p \in \mathbb{N}$	$\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n+1)x^{\alpha - n}$ $\begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} \text{ si } n \le p \\ 0 \text{ si } n > p \end{cases}$	Par suite si f une fonction polynômiale de degré p alors pour tout $n \leq p$, $f^{(n)}$ est une fonction polynômiale de degré $p - n$ et pour tout $n > p$, $f^{(n)} = 0$.
$e^{\alpha x}$	$\alpha^n e^{\alpha x}$	α est un réel
$\cos(x)$	$\cos(x + n\frac{\pi}{2})$	
$\sin(x)$	$\sin(x + n\frac{\pi}{2})$	
$\dfrac{1}{x-a}$	$(-1)^n \dfrac{n!}{(x-a)^{n+1}}$	sur I ne contenant pas a
$\ln\|x - a\|$	$(-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{(x-a)^n}$	$n \geq 1$, sur I ne contenant pas a
$u(ax+b)$	$a^n.u^{(n)}(ax+b)$	Avec u de classe C^n

Les six premières fonctions sont de classe C^{∞} sur les intervalles où elles sont définies