Exercices – Chapitre 14: Matrices

♦ Eléments de correction en ligne - ♥ Exo à savoir refaire

Calcul dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

14.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Déterminer les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire telles que AB = BA

b. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $X^2 = A$.

14.2 Soit $J\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

Montrer que $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $JAJ= s(A)J$ où $s(A)$ est la somme de tous les termes de A.

14.3.1 Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si la somme de tous les éléments de chacune de ses colonnes est égale à 1. Montrer que si A et B sont stochastique alors C = AB est aussi stochastique.

♥ *Puissances de matrices carrées de petite dimension*

14.3.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.a. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$

b. Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, \exists\, (\alpha_n, \beta_n)\in\mathbb{R}^2, A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.

Préciser des relations de récurrence liant les différents termes des suites (α_n) et (β_n).

c. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.

♦ **14.4** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

b. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $A^n = u_n A + v_n I_3$.

c. Calculer u_n et v_n en fonction n et en déduire une expression de A^n, pour $n\in\mathbb{N}$.

14.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3. En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

14.6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = A - I_3$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer N^n et en déduire l'expression de A^n.

14.7 Soit B matrice carrée d'ordre n telle que $B^2 = I_n$. Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $(B + I_n)^p$.

14.8 Soit $J\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1.

a. Pour $p\in\mathbb{N}$, déterminer J^p.

b. On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer A^n.

♦ **14.9** Donner les puissances nièmes des matrices suivantes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

♥ ***Inversibilité des matrices carrées, calcul de A^{-1} en petite dimension***

14.10 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $A^2 = \alpha A + \beta I_3$.

b. A l'aide de la relation précédente retrouver que A est inversible et calculer A^{-1}.

14.11 Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer B^2. B est-elle inversible?

14.12 Soit A une matrice carrée d'ordre n nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$.

Montrer que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = I_4 - B$. Calculer A^4, puis inverser B. Calculer ensuite B^p pour $p \in \mathbb{N}$.

14.13 Justifier que les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs inverses :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14.14 ***Matrice dépendant d'un paramètre***

a. Déterminer pour quelles valeurs du réel a, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ est inversible.

♦ **b.** Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

c. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & c & a & c \\ b & b & d & d \\ ab & cb & ad & cd \end{pmatrix}$. Donner une CNS pour que A soit inversible

---

♦ ***En dimension quelconque***

14.15 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par : $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \text{ ou } j = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Déterminer A^p, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

♥ **14.16** Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général égal à 1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer J^p.

a. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ d'ordre n telle que : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a_{ij} = \begin{cases} a \text{ si } i = j \\ b \text{ sinon} \end{cases}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer A^p.

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice A précédente soit inversible

14.17 Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $MX = XM$.

Ind. Quel est l'effet de la multiplication à droite ou à gauche de A par $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

♥ **14.18** Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

a. Calculer $U.V^T$ et $V^T.U$.
b. On pose : $A = U.V^T + I_n$. Calculer A^2 en fonction de A, I_n et α.
c. En déduire une CNS pour que la matrice A soit inversible. Quand elle existe, calculer A^{-1}.

14.19 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 1+\alpha_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^*_+)^n$.

a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En écrivant A comme une somme de matrices « intéressantes », calculer X^TAX.

b. En déduire que la matrice A est inversible.

14.20 ***Matrice à diagonale strictement dominante.***

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$. Montrer par l'absurde que la matrice A est inversible.

Problèmes :

14.21 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
b. On pose : $D = P^{-1}A P$. Déterminer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
c. En déduire A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
d. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles définies par leurs premiers termes x_0, y_0 et z_0 et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - z_n \\ y_{n+1} = -4x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases}.$$

Déterminer x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

14.22 Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on définit le <u>commutant</u> de A par : $\mathcal{C}(A) = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA \}$

a. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que P est inversible puis vérifier que $P^{-1}AP = D$

b. Justifier que $\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a,b,c,d,e,) \in \mathbb{R}^5 \right\}$ et en déduire $\mathcal{C}(A)$

♦ **14.23** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. On souhaite résoudre l'équation $AX + XA = I_3$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3, en déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
b. Montrer que si X est solution alors X commute avec A^2 puis avec A et résoudre l'équation.

♥ **14.24** On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques carrées d'ordre n.

a. Que dire d'une combinaison linéaire de deux matrices symétriques ? antisymétriques ?
b. Que dire du produit de deux matrices symétriques, de deux matrices antisymétriques ? D'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ?

c. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ inversible, que dire de S^{-1} ? même question avec $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

d. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. COURS