

Chapitre 13/14 : Matrices et systèmes linéaires- résumé de cours

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , n et p deux entiers naturels non nuls.

1. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

1.1 Définition et vocabulaire

Déf: On appelle matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{K} , toute famille de \mathbb{K} indexée par $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. On note $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$ et on représente A sous forme de tableau.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{colonne } j & & & & \\ & & \downarrow & & \cdots & & \\ \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1} & \cdots & & a_{1,p} \\ \vdots & & a_{i,j} & \leftarrow \\ a_{n,1} & \cdots & & a_{n,p} \end{array} \right) & & \text{ligne } i & & & & \end{array}$$

Proposition 14.1: Deux matrices sont égales ssi elles ont même taille et mêmes coefficients.

Notation: L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans \mathbb{K} est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Vocabulaire:

- ★ La matrice nulle est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, on la note $O_{n,p}$.
- ★ Si $n = 1$ alors A est une matrice ligne.
- ★ Si $p = 1$ alors A est une matrice colonne
- ★ Si $n = p$ alors A est une matrice carrée d'ordre n . Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ On note $L_i(A) = (a_{i,1}, \dots, a_{i,p})$ la i ème ligne de A et $C_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ la j ème colonne de A .

1.2 Combinaisons linéaires de matrices

Def: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$, deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit une loi interne d'addition en posant $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$
- On définit une loi de produit externe en posant $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$

Proposition 14.2: Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a les règles de calcul suivantes :

① Propriétés de l'addition

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O_{n,p} = O_{n,p} + A$
- $A + (-A) = (-A) + A = O_{n,p}$ où $-A = (-a_{i,j})_{(i,j) \in \Omega}$
- $A + B = B + A$

② Propriétés de la multiplication par un scalaire

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu B$
- $\lambda(\mu A) = (\lambda \mu)A$
- $1_{\mathbb{K}} \cdot A = A$

★ Remarque : On verra ultérieurement que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni des deux opérations précédentes est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

★ Notation: Soit i et j deux entiers naturels. Le symbole de Kronecker δ_{ij} est un entier qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon

Def: On appelle matrice élémentaire et on note $E_{i,j}$ la matrice $(\delta_{k,i} \times \delta_{l,j})_{(k,l) \in \Omega}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

C'est à dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et à la colonne j

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} & \text{colonne } j & \\ 0 & \cdots & \downarrow & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & \leftarrow \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \text{ ligne } i$$

Proposition 14.3 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, A s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des

$$\text{matrices } (E_{i,j})_{(i,j) \in \Omega} : A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{i,j} E_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{i,j} E_{i,j}$$

★ Remarques : On verra ultérieurement que les matrices élémentaires forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

1.3 Produit de deux matrices

Def : Soit $n, p, m \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.

On définit la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})$ avec

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1;n \rrbracket \times \llbracket 1;m \rrbracket$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,k} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & \cdots & b_{k,j} & \cdots & b_{k,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,j} & \cdots & b_{p,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,j} & \cdots & c_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i,1} & \cdots & c_{i,j} & \cdots & c_{i,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,j} & \cdots & c_{n,m} \end{pmatrix}$$

★ **Attention** : Le produit matriciel a des propriétés différentes du produit de deux réels :

- Le produit AB n'est pas toujours défini : il existe à condition que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B . Même si BA est aussi défini, on n'a pas $AB = BA$
- Ce n'est pas une loi interne excepté dans le cas particulier des matrices carrées.
- Il existe A et B non nulles telles que $AB = 0$ on dit que le produit matriciel n'est pas une loi intègre. En conséquence, si $AB = AC$ on ne peut pas en déduire que $B = C$.

Proposition 14.4: Propriétés du produit matriciel.

$$\textcircled{1} \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K}), \quad A(BC) = (AB)C$$

$$\textcircled{2} \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), \quad A(B + C) = AB + AC$$

$$\textcircled{3} \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), \quad (A + B)C = AC + BC$$

$$\textcircled{4} \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$\textcircled{5} \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), I_n \cdot A = A \cdot I_p = A \text{ où } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ est la matrice identité.}$$

Dans la pratique.: Pour calculer $C = AB$ on multiplie les lignes de A par les colonnes de B .

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, c_{ij} = L_i(A) \cdot C_j(B)$
- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(AB) = L_i(A) \cdot B$
- $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, C_j(AB) = A \cdot C_j(B)$

Proposition 14.5 Multiplication à droite et à gauche par $E_{i,j}$.

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall E_{i,j} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), A \cdot E_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i ème colonne qui contient la j ème colonne de A .
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), E_{i,j} \cdot A$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i ème ligne qui contient la j ème ligne de A .
- Lorsque le produit est bien défini, $E_{i,j} \times E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$

1.4 OEL et OEC

Def : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$\textcircled{1}$ On appelle opérations élémentaires sur les lignes (OEL) de A , les opérations suivantes

- La permutation notée $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'échange des lignes i et j .
- La dilation notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est l'ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j

$\textcircled{1}$ On appelle opérations élémentaires sur les colonnes (OEC) de A , les opérations suivantes

- La permutation notée $C_i \leftrightarrow C_j$ est l'échange des colonnes i et j .
- La dilatation notée $C_i \leftarrow \lambda C_i$ est la multiplication de la colonne C_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ est l'ajout à la colonne C_i d'une dilatation de la colonne C_j

Def : Soit λ un scalaire non nul, on définit les matrices carrées suivantes :

- Les matrices de permutation : $P_{i,j}$ obtenue en appliquant $L_i \leftrightarrow L_j$ à I_n .

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$$

- les matrices de dilatations : $D_{i,\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à I_n .

$$D_{i,\lambda} = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$$

- Les matrices de transvections $T_{i,j,\lambda}$ obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à I_n .

$$T_{i,j,\lambda} = I_n + \lambda E_{ij}$$

Pour obtenir les matrices correspondant à une OEC, on applique cette OEC à I_p

Proposition 14.6 : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$\textcircled{1}$ L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ correspond à multiplier à gauche par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ② L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $P_{i,j}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
 L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ correspond à multiplier à droite par la matrice $D_{\lambda,i}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
 L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ correspond à multiplier à droite par la matrice $T_{i,j,\lambda}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

1.5 Transposition

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $A = (a_{i,j})$.

La transposée de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $A^T = (a_{j,i})$

★ Dans la pratique: les lignes de A sont les colonnes de A^T et inversement.

Proposition 14.7 Propriétés de la transposition

- ① La transposition est linéaire c'est à dire, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha.A + \beta.B)^T = \alpha.A^T + \beta.B^T$
 ② $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), (A^T)^T = A$
 ③ $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K}), (AB)^T = B^T A^T$

2. Systèmes linéaires

2.1. Exemples en petite dimension, présentation de l'algorithme du pivot

$$(S_1): \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x = 5y - 2 \end{cases} \quad (S_3): \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 7x - 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$(S_4): \begin{cases} -y - z = 1 \\ 4x + 3y + 11z = -2 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{cases} \quad (S_5): \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ -x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

★ Interprétation géométrique pour les systèmes 2×2 , 2×3 et 3×3 à coefficients réels.

• Soit a, b et c des réels avec $(a,b) \neq (0,0)$, $\boxed{ax + by = c}$ est une équation de droite dans le plan.

Aussi résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ revient à étudier la position relative de deux droites du plan.

• Soit a, b, c et d des réels avec $(a, b, c) \neq (0,0,0)$, $\boxed{ax + by + cz = d}$ est une équation de plan dans l'espace.

Aussi résoudre le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ revient à étudier la position relative de deux

plans de l'espace et résoudre le système $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ revient à étudier la position

relative de trois plans de l'espace.

2.2 Généralités

Def: Un système linéaire à n équations et p inconnues à coefficients dans \mathbb{K} est un ensemble de conditions de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \text{où } (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{K}^{n \times p} \text{ et } (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$$

Contre-exemples :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0 \end{cases}$$

★ Ecriture matricielle d'un système linéaire :

• On pose : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$. A est la matrice des coefficients du système (S)

• On pose : $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. B est la matrice du 2nd membre de (S).

• On appelle matrice augmentée du système : $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} & b_n \end{array} \right)$

• Lorsque $B = 0$ on dit que le système est homogène.

• On note (H) le système homogène associé à (S) obtenu en remplaçant le second membre 0.

• On pose : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. L'écriture matricielle de (S) est $AX = B$.

Résoudre (S) c'est trouver les matrices colonne X qui vérifient l'égalité.

• On dit que le système (S) est compatible s'il admet au moins une solution. Sinon, le système est dit incompatible. On peut observer qu'un système homogène est toujours compatible, car il admet au moins une solution : $X = 0$

Proposition 14.8 : Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Soit (S) un système linéaire et (H) le système homogène associé. Si (S) est compatible alors les solutions de (S) s'obtiennent en faisant la somme d'une solution particulière de (S) et des solutions de (H).

2.3. Opérations élémentaires sur les lignes (O.E.L.), algorithme du pivot de Gauss

Def : Soit (S) un système de n équations ou lignes notées L_1, L_2, \dots, L_n . On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S), l'une des transformations suivantes

- La permutation notée $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'échange des lignes i et j.
- La dilation notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est la multiplication de la ligne L_i par le scalaire λ non nul.
- La transvection notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est l'ajout à la ligne L_i d'un multiple de la ligne L_j

Proposition 14.9: Si on applique à un système (S) une OEL alors on obtient un système (S') équivalent à (S), c'est à dire ayant les mêmes solutions.

★ Remarque : Les opérations type $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ avec $\lambda \neq 0$ donnent aussi un système équivalent.

Def : Une matrice M à n lignes et p colonnes est dite échelonnée en ligne lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées.

- Si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes le sont.
- A partir de la deuxième ligne, pour une ligne non nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite de celui de la ligne précédente.

C'est à dire que pour $i \geq 2$ la ligne i commence par au moins (i - 1) zéros

Exemples : On peut dessiner « un escalier » au dessus des zéros

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Def : (suite)

- Un système est échelonné si sa matrice est échelonnée en ligne
- Pour une matrice, ou un système, échelonné(e), on appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne.
- Le nombre de pivots est le rang du système

Def : Soit (S) un système échelonné de rang r.

- Les équations L_1, L_2, \dots, L_r sont les équations principales de (S)
- Les équations L_{r+1}, \dots, L_n sont les conditions de compatibilité
- Les r inconnues associées à chaque pivot sont les inconnues principales, les (p - r) autres sont les inconnues secondaires qui seront prises comme paramètres pour exprimer les éventuelles solutions du système

Exemple :

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = m \end{cases} \begin{matrix} \text{équations principales} \\ \text{relations de compatibilité} \end{matrix}$$

Le système est de rang 2, x et y sont les 2 inconnues principales et z l'inconnue secondaire

Proposition 14.10 : Soit (S) un système à n équations et p inconnues, échelonné et de rang r.

- (S) est compatible si et seulement si les (n - r) relations de compatibilité sont vraies.
- Si (S) est compatible avec $r = p$ alors (S) admet une unique solution qu'on obtient en « remontant » le système.
- Si (S) est compatible avec $r < p$ alors (S) admet une infinité de solutions qui s'expriment à l'aide de (r-p) paramètres

Proposition 14.11 : Tout système est équivalent à un système échelonné obtenu par une succession d'OEL sur ce système.

Démo : L'algorithme du Pivot de Gauss permet de passer de (S) à un système échelonné en ligne en effectuant des OEL. Démonstration par récurrence sur n en annexe.

★ Remarques : Au lieu d'effectuer des OEL sur un système (S), on peut les effectuer sur sa matrice augmentée.

Corollaire 1 : Toute matrice donne une matrice échelonnée après une succession d'OEL.

Corollaire : Un système de n équations à p inconnues peut avoir

- Une unique solution
- Pas de solution.
- Une infinité de solutions

3. Les matrices carrées

3.1 Calculs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Def : Une matrice $n \times n$ est appelée matrice carrée d'ordre n.

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

D'après le paragraphe précédent :

- Toute combinaison linéaire de matrices carrées est carrée.
- Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n , les produits matriciels AB et BA existent et donne une matrice carrée d'ordre n .
- La transposée d'une matrice carrée est carrée.

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable pour les opérations usuelles sur les matrices

- Le produit matriciel n'est pas commutatif donc, en général on a $AB \neq BA$.

Lorsque $AB = BA$, on dit que A et B commutent

- Pour toute matrice carrée A , $A\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_n A = A$

Def : On peut définir des puissances entières dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la façon suivante :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A^0 = \mathbf{I}_n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, A^{k+1} = A^k \cdot A = A \cdot A^k$$

★ **Remarque :** Il existe des matrices non nulles ayant une puissance entière nulle, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est nilpotente signifie qu'il existe un entier p tel que $A^p = \mathbf{O}_n$

Si, de plus, $A^{p-1} \neq \mathbf{O}_n$, on dira que A est nilpotente d'ordre p . Dans ce cas, $\forall k \geq p$, on a $A^k = \mathbf{O}_n$

Proposition 14.12 : Si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on peut appliquer les formules du binôme et de Bernoulli.

$$\forall p \in \mathbb{N}, (A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k A^{p-k} \text{ et } A^p - B^p = (A - B) \sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}$$

★ **Dans la pratique :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, A et $\lambda \mathbf{I}_n$ commutent donc $(A + \lambda \mathbf{I}_n)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k (\lambda \mathbf{I}_n)^{p-k} = \sum_{k=0}^p \lambda^{p-k} \binom{p}{k} A^k$.

- $\mathbf{I}_n - A^p = \mathbf{I}_n^p - A^p = (\mathbf{I}_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$ si A est nilpotente d'ordre p alors $\mathbf{I}_n = (\mathbf{I}_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k$

3.2 Ensembles de matrices carrées particulières

a) Matrices diagonales

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $A = (a_{i,j})$ est diagonale ssi ($i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$)
- Si A est diagonale et si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ii} = \lambda \in \mathbb{R}$, $A = \lambda \mathbf{I}_n$ est dite scalaire.

Exemple: $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

★ **Notation:** $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n .

Proposition 14.13 :

- ① $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire.
- ② $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable pour le produit matriciel et $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{diag}(\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n)$
- ③ $\forall p \in \mathbb{N}, (\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$

b) Matrices triangulaires

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $A = (a_{i,j})$ est **triangulaire supérieure** lorsque tous ses coefficients situés sous sa diagonale sont nuls c'est à dire que $(i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.
- $A = (a_{i,j})$ est **triangulaire inférieure** lorsque tous ses coefficients situés au-dessus de sa diagonale sont nuls c'est à dire que $(i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$.

★ Exemples: $T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Notations: On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Toute matrice diagonale est triangulaire.

Proposition 14.14 :

- ① $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) est stable par combinaison linéaire.
 - ② $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) est stable par produit matriciel
- Dans les deux cas la diagonale de TT' est $(t_{11}t'_{11}, \dots, t_{nn}t'_{nn})$.

c) Matrices symétriques et antisymétriques

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- A est **symétrique** lorsque ${}^tA = A$ c'est à dire que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{j,i} = a_{i,j}$
- A est **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$ c'est à dire que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{j,i} = -a_{i,j}$

★ Remarques:

Une matrice antisymétrique est nécessairement de diagonale nulle.
Toute matrice diagonale est symétrique.

★ Notation: On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{K})$ celui des matrices antisymétriques. Ces ensembles sont stables par combinaison linéaire mais pas pour le produit matriciel.

4. Matrices carrées inversibles**4.1 Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{K})$**

Def: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible lorsque il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, B est unique, est appelé inverse de A et notée A^{-1} .

★ Attention: O_n n'est évidemment pas inversible mais il existe des matrices non nulles non inversibles.

★ Exemples et contre-exemples à connaître:

- I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

- Les matrices d'OEL (resp. OEC) sont inversibles
 $(P_{i,j})^{-1} = P_{i,j}$ $(D_{i,\lambda})^{-1} = D_{i,1/\lambda}$ $(T_{i,j,\lambda})^{-1} = T_{i,j,-\lambda}$
- Toute matrice ayant une ligne ou une colonne nulle n'est pas inversible.
- Une matrice diagonale est inversible ssi tous ses éléments diagonaux sont non nuls.
 Si $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket d_i \neq 0$ alors $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1})$.

★ Remarque : Si une matrice A est inversible alors

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B=C$$

On peut donc "simplifier" l'égalité $AB = AC$ en multipliant à gauche par A^{-1}

★ Notation/vocabulaire: L'ensemble des matrices inversibles est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire d'ordre n .

Proposition 14.15: Compatibilité avec les opérations matricielles:

Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

① $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$

$$AB \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } (A^{-1})^{-1} = A$$

$GL_n(\mathbb{K})$ est un groupe multiplicatif

② $\forall n \in \mathbb{N}, A^n$ est inversible et $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

③ λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

④ A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4.3 Caractérisations des matrices inversibles et calcul pratique de l'inverse :

Proposition 14.16 : Les OEL (resp. les OEC) sur une matrice préservent l'inversibilité ou encore si A donne A' après une succession d'opérations élémentaires sur ses lignes (resp. sur ses colonnes) alors A est inversible si et seulement si A' est inversible.

Théorème 14.1: Caractérisations des matrices inversibles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① A est inversible
- ② Pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ a une unique solution.
- ③ On peut obtenir I_n à partir de A par une succession d'OEL

Preuve : On montre que ① \Rightarrow ② puis que ② \Rightarrow ③ puis que ③ \Rightarrow ①.

Corollaire : Une matrice triangulaire est inversible si et seulement tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Si c'est le cas alors son inverse est une matrice triangulaire.

★ Dans la pratique : Méthodes de calcul de l'inverse de A

Méthode 1 : Résolution d'un système linéaire.

On considère le système $(S) \Leftrightarrow AX = B$ où B est quelconque dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

On résout ce système. S'il a une unique solution alors A est inversible et on a :

$$(S) \Leftrightarrow X = A^{-1}B, \text{ ce qui permet de récupérer } A^{-1}$$

Méthode 2 : Utilisation de l'algorithme de pivot de Gauss

Par une succession d'OEL on échelonne A . S'il n'y a pas de zéro sur la diagonale alors A est inversible et on continue à appliquer des OEL pour obtenir I_n .

Parallèlement, on applique les mêmes OEL sur I_n : on obtient une matrice B .

$$(A | I_n) \xrightarrow{\text{OEL}} (I_n | B)$$

