Programme de colles-semaine 18 - 26/02 au 01/03

I. Dérivabilité d'une fonction numérique.

- Théorèmes sur les fonctions dérivables:

★ Si f dérivable en a avec $f(a)$ extremum local alors $f'(a) = 0$.

★ Théorème de Rolle

★ Théorème des accroissements finis, application: Inégalités des AF, application: Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors f est lipschitzienne sur $[a, b]$.

★ Théorème de la limite de la dérivée .

- Fonctions convexes, lemme des trois pentes, caractérisation de la convexité pour une fonction dérivable, deux fois dérivables, inégalités classiques :

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1 \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes, utilisation dans le calcul de dérivées nièmes.
- Application à l'étude de suites récurrente.

II. Matrices et systèmes linéaires

- Ensemble des matrices à lignes et p colonnes et à coefficients dans K , matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne, matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaire $E_{i,j}$.
 - Opérations sur les matrices à n lignes et p colonnes, combinaison linéaire, produit.
 - Propriétés des opérations matricielles.
 - Produit à droite et à gauche par les matrices élémentaires E_{ij} . Définition des OEL et des OEC, matrices d'OEL et d'OEC, et interprétation en terme de produit matriciel.
 - Transposition : définition et propriétés de calcul.
 - Généralités et vocabulaire, interprétation géométrique en dimension 2 et 3, matrice et matrice augmentée d'un système, écriture matricielle d'un système linéaire.
 - OEL pour un système, algorithme du pivot de Gauss
 - On définit le rang du système comme le nombre de pivot à l'issue de l'échelonnement.
- Soit un système de n équations à p inconnues de rang r .
- Si $r = p$ alors le système admet une unique solution
- Si $r < p$ alors le système a r équations principales et $n - r$ condition de compatibilité et donc il admet une infinité de solutions ou aucune solution.
-

Déroulement de la colle:

- ① Résolution d'un système linéaire de petite dimension avec ou sans paramètre

Exercices pour préparer la colle au verso.

- ② Question de cours

- Enoncé et démonstration du théorème des accroissements finis.
- Donner les trois inégalités de convexité à connaître et savoir le justifier.
- Donner la définition du produit matriciel et expliquer l'effet de la multiplication à droite par une matrice E_{ij} (schéma accepté).
- Démontrer l'associativité du produit matriciel.

- ③ Exercice d'analyse au choix du colleur dont étude de suites récurrentes

On pourra donner des indications au fur et à mesure et évaluer la réactivité des étudiants.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Exercices d'entraînements :

1. Résoudre les systèmes suivants

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \\ x-2y+2z=-2 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x+y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x+2z=1 \\ -y+z=2 \\ x-2y=1 \end{cases} \quad (4)$$

Réponse :

$$S_1 = \{(-1, 0, 2)\} \quad S_2 = \{(0, z+1, z), z \in \mathbb{R}\} \quad S_3 = \{(2z-4t-2, -3z+7t+3, z, t), z \in \mathbb{R}\}$$

$$S_4 = \{(-1, -1, 1)\}$$

2. On considère le système suivant dans lequel m est un paramètre réel :

$$\begin{cases} x+2z=4 \\ 2x+my+4z=8-m \\ -x-my+(m^2-3m-2)z=2m-4 \end{cases} \quad (S_m)$$

a. Donner le nombre de solutions de (S_m) en fonctions des valeurs de m .b. Le résoudre pour $m=0$ et $m=1$.

Réponse :

a. Après application du pivot de Gauss, on a $(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=4 \\ my=-m \\ m(m-3)z=m \end{cases}$

On distingue donc 3 cas :

1^{er} cas : $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

Le système est de rang 3 donc il admet une unique solution.

2^{ème} cas : $m=0$

Le système est compatible et de rang 1, il admet une infinité de solutions.

3^{ème} cas : $m=3$

Le système est incompatible, il n'admet pas de solution

b. On remplace dans le système échelonné :

Pour $m=0$, les solutions sont $\{(4-2z, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

Pour $m=1$, la solution est $S_1 = \left\{ \left(5, -1, -\frac{1}{2} \right) \right\}$