Fiche : Méthode pratiques pour l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1

Soit une fonction définie sur un domaine D de $\mathbb{R}$. La suite (u_n) définie par:
$u_0 \in D$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ est une suite récurrente d'ordre 1 associée à la fonction f.

On a $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0)$ etc... $u_n = \underbrace{\left(f \circ f \circ \cdots \circ f\right)}_{n \text{ fois}}(u_0)$

Cette fiche rassemble des **résultats généraux**, **qui doivent être redémontrés en s'adaptant à l'exercice proposé.**

---

1. Problème d'existence, notion d'intervalle stable :

La suite (u_n) est bien définie lorsque tous ses termes existent. Ceci est réalisé ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D$.

Lorsque $D = \mathbb{R}$, la suite u est toujours bien définie.

Def: Soit I un intervalle contenu dans D. On dit que I est stable par f lorsque $f(I) \subset I$ c'est à dire $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.

C'est le cas lorsque $f : I \to I$

Résultat 1: Soit I stable par f et u une suite associée à f, si $u_0 \in I$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.

Démonstration par récurrence.

2. Suite associée à une fonction monotone:

Lorsque $f : I \to I$ est monotone, on peut en déduire des informations sur la monotonie de (u_n)

Résultat 2: Soit I un intervalle stable par f et (u_n) une suite associée à f avec $u_0 \in I$.
① Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone et plus précisément:
Si $u_0 \leq u_1$ alors u est croissante.
Si $u_0 \geq u_1$ alors u est décroissante.
② Si f est décroissante sur I alors les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonie contraire.

Démonstration par récurrence.

Dans la pratique: Il n'est pas toujours facile, ni possible de trouver des intervalles stables sur lequel f est monotone. Pour une méthode plus générale, revenons à la définition: Il s'agit de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

On peut alors s'intéresser à la fonction $g : x \to f(x) - x$.
Si la suite prend ces valeurs dans I et si g garde un signe constant sur I alors la suite est monotone et son sens de variation est donné par le signe de $g(x)$

3. Limite et point fixe :

Def : Soit $a \in D$, on dit que a est un point fixe de f ssi $f(a) = a$ c'est à dire a est solution de $f(x) = x$ sur D.

Interprétation géométrique : Les points fixes de f sur I, si ils existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f sur I et de la droite $(y = x)$.

Résultat 3: Soit I un intervalle stable par f et (u_n) une suite associée à f avec $u_0 \in I$.
Si $u_n \to \ell$ avec $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$

Démonstration: On suppose que $u_n \to \ell$

f est continue en ℓ donc $f(u_n) \to \ell$.

(u_{n+1}) est extraite de (u_n) donc $u_{n+1} \to \ell$.

$f(u_n) = u_{n+1}$ donne par passage à la limite $f(\ell) = \ell$

Dans la pratique: Avec les mêmes hypothèses, si I est un intervalle fermé et si f est continue sur I alors $\ell \in I$ et $\ell = f(\ell)$.

⚠ Attention: La recherche des points fixes de f par la résolution de l'équation f(x) = x fournit les seules limites (finies) possibles pour la suite u, mais la suite peut très bien ne pas converger même si f admet des points fixes et même si elle n'en admet qu'un seul.

Remarque: Dans le cas où $f : I \to I$ est décroissante sur I, pour démontrer que u converge il faudra démontrer que les deux sous suite convergent vers la même limite. Attention, les limites possibles de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont les points fixes de $g = f \circ f$

4. *Cas où f est contractante :*

Def: On dit que f est **contractante** sur I ssi f est k-lipschitzienne sur I avec $0 \leq k < 1$,
C'est-à-dire : $\forall (x,y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Dans la pratique: On utilise le plus souvent l'inégalité des accroissements finis pour établir que f est contractante sur I : il suffit de majorer $|f'(x)|$ sur I par $k < 1$.

Résultat 4: Soit I un intervalle stable par f et α un point fixe de f sur I.
Si f est k-contractante sur I alors toute suite associée à f avec $u_0 \in I$ converge vers α et de plus:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.

Démonstration par récurrence.

Remarque: la suite u est une suite de valeurs approchées du point fixe. L'erreur commise est contrôlée par l'inégalité par $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$. La convergence de la suite est d'autant plus rapide que k est petit.