

Programme de colles-semaine 19- 04/03 au 08/03

Matrices et systèmes linéaires

I. Matrices et systèmes linéaires

- Ensemble des matrices à lignes et p colonnes et à coefficients dans K, matrice carrée, matrice ligne, matrice colonne, matrice nulle, matrice identité, matrices élémentaire $E_{i,j}$.
- Opérations sur les matrices à n lignes et p colonnes, combinaison linéaire, produit.
- Propriétés des opérations matricielles.
- Produit à droite et à gauche par les matrices élémentaires E_{ij} . Définition des OEL et des OEC, matrices d'OEL et d'OEC, et interprétation en terme de produit matriciel.
- Transposition : définition et propriétés de calcul.
- Système linéaire : Généralités et vocabulaire, interprétation géométrique en dimension 2 et 3, matrice et matrice augmentée d'un système, écriture matricielle d'un système linéaire.
- OEL pour un système, algorithme du pivot de Gauss
- On définit le rang du système comme le nombre de pivot à l'issue de l'échelonnement.

Soit un système de n équations à p inconnues de rang r.

Si $r = p$ alors le système admet une unique solution

Si $r < p$ alors le système a r équations principales et $n - r$ condition de compatibilité et donc il admet une infinité de solutions ou aucune solution.

- Matrices carrées, opérations sur les matrices carrées, puissances entières, formule du binôme et de Bernoulli pour deux matrices qui commutent.
- Matrices carrées particulière : matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques.
- Matrices carrées inversibles : définition, exemples, compatibilité avec les opérations, notation $GL_n(\mathbb{K})$.
- Les OEL et les OEC conservent l'inversibilité.
- $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \forall B \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = B$ a une unique solution

$\Leftrightarrow$ On peut obtenir I_n en appliquant une succession d'OEL à A.

- Calcul pratique de l'inverse : Système, OEL (pivot de Gauss) transformant $(A|I_n)$ en $(I_n|A^{-1})$.
- CNS d'inversibilité pour les matrices triangulaires
- Inversibilité à droite et à gauche :

si $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ alors A est inversible avec $B = A^{-1}$

si $\exists B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$ alors A est inversible avec $B = A^{-1}$

Application au calcul de A^{-1} .

Déroulement de la colle:

① Etudier l'inversibilité et calculer l'inverse d'une matrice carrée d'ordre 3

② Question de cours

- Démontrer l'associativité du produit matriciel
- Montrer que si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure
- Calcul de la puissance d'une matrice carrée à l'aide de la formule du binôme.

③ Exercices sur systèmes et calculs matriciels.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Prévisions : Calculs matriciels / espace vectoriel