Exercices : Chapitre 15 - Espaces Vectoriels

♥ A savoir refaire - ♦ Eléments de correction en ligne

Sous-espaces Vectoriels

♥ **15.1** Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E.

a. $A = \{ (x, x, y)\in \mathbb{R}^3,\ x, y\in \mathbb{R} \}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

b. $B = \{ (x, y, z)\in \mathbb{R}^3,\ x + 2y = 0 \}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.

c. $D = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

d. $F = \{ x\in\mathbb{R} \mapsto a\cos x + b\sin x,\ (a, b)\in\mathbb{R}^2 \}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

e. $G = \{ f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \}$ dans $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

f. $H = \{ f\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = 2f(x) \}$ dans $E = \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

g. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a + d = 0 \right\}$ dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

♥ **15.2** Expliquer pourquoi la partie F n'est pas un sous-espace Vectoriel de E

a. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x + y = 1 \}$.

b. $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0 \}$.

c. $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F = \{ f\in E,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \}$.

♦ **15.3** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

a. L'ensemble des fonctions affine sur $\mathbb{R}$?

b. L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 1$?

c. L'ensemble des fonctions f telles que $f(1) = 0$?

d. L'ensemble des fonctions de signe constant ?

♥ **15.4** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on donne $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (0, 1, 1)$ et $\vec{t} = (1, 0, 1)$.

On pose $F = \text{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ et $G = \text{Vect}(\vec{w},\vec{t})$, Déterminer $F\cap G$ et montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

♦ **15.5** Soit E un $\mathbb{K}$-espace Vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

a. Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

b. Montrer que $F\cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$

♥ **15.6** ***Sous-espaces supplémentaires:*** Dans chacun des cas suivants, démontrer que $E = F \oplus G$

a. $F = \text{Vect}((1,-1))$, $G = \text{Vect}((1, 2))$ et $E = \mathbb{R}^2$

b. $F = \{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \}$, $G = \text{Vect}((2,-1,0))$ et $E = \mathbb{R}^3$.

c. $F = \{ (x_1,x_2,\ldots x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \}$, $G = \text{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} = (1,1,\ldots,1)$ et $E = \mathbb{R}^n$.

d. $F = \{ f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \}$, G le SEV des fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ et $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$

e. $F = \{ f\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(0) = f'(0) = 0 \}$, $G = \{ x\mapsto ax + b,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \}$ et $E = \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

f. $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (matrices symétriques) et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ (matrices antisymétriques) dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

15.7 Équations de sous-espaces vectoriels.

a. Soit $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 2 ,3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Trouver une CNS sur les réels x, y et z pour que $X = (x, y, z) \in \text{Vect}(u, v)$.

b. Soit $u = (1, 1, 1, 0)$ et $v = (0, 0, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Trouver une CNS sur les réels x, y, z et t pour que $X = (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u, v)$.

Familles de Vecteurs

♥ **15.8** Préciser si $\mathcal{F}$ est libre ou liée dans E
a. $\mathcal{F} = ((2, 3)\ (4, 5))$ dans $E = \mathbb{R}^2$
b. $\mathcal{F} = ((1, 0, 1)\ (2, 1, 0)\ (0, -1, 2))$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
c. $\mathcal{F} = ((1, 1, 1)\ (2, 1, 0)\ (0, -1, 2))$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
d. $\mathcal{F} = (u,v)$ avec $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ et $v_n = n2^n$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
e. $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = xe^x$ et $f_3(x) = e^x$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
f. $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x) = \cos^2 x$, $f_2(x) = \cos(2x)$ et $f_3(x) = 1$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

15.9 Soit (u, v, w) une famille libre dans un espace vectoriel E.
Montrer que la famille (u + v, v + w, w + u) est une famille libre dans E.

15.10 On pose $\forall k\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}$, $f_k(x) = e^{kx}$
Démontrer, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que la famille $\mathcal{F}_n = (f_k)_{0\le k\le n}$ est libre dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

15.11 On pose $\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}$, $f_k(x) = \cos(kx)$ et on fixe n dans $\mathbb{N}^*$.

a. Soit p et q deux entiers naturels non nuls, calculer $I_{p,q} = \int_0^{\pi} \cos(px)\cos(qx)dx$.

En déduire que la famille $\mathcal{F}_n = (f_k)_{1\le k\le n}$ est libre dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
♦ **b**. Redémontrer ce résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$
On pourra dériver dans l'hérédité

♦ **15.12** Soit $(e_i)_{1\le i\le n}$ une famille libre d'un espace vectoriel et $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ une famille de scalaires.

On pose : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $\forall i\in [\![1, n]\!]$, $v_i = u + e_i$.

Montrer que la famille $(v_i)_{1\le i\le n}$ est liée si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

♦ **15.13** Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$, $\vec{v} = \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de E.

Dimension d'un EV

♥ **15.14** Soit $e_1 = (1, 1, 2, 2)$, $e_2 = (1; 1, 1, 1)$, $e_3 = (1, 2, 3, 4)$, $e_4 = (1,-1, 1, 1)$.

a) Montrer que $(e_1; e_2; e_3; e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Quelles sont les coordonnées de (4, 3, 2, 1) dans cette base ?

15.15 Dans $\mathbb{R}^4$ on donne $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (1, 2, 0, 0)$, $e_3 = (1, 2, 3, 4)$, $e_4 = (1, 3, 5, 7)$ et $e_5 = (0, 2, 0, -2)$. Déterminer la dimension de $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

♥ **15.16** Dans chacun des cas, justifier que F un SEV de dimension finie de E et préciser sa dimension.
a. $F = \{ (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x - y + z = 0\}$.
b. $F = \{ (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ x - y + 3z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\}$.
c. $F = \{(x, x, y, y)\in\mathbb{R}^4,\ (x, y)\in\mathbb{R}^2\}$ et $E = \mathbb{R}^4$
d. $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{ f\in E,\ f'' - 3f' + 2f = 0 \}$
e. $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \{ f\in E,\ f'' + f' + f = 0 \}$
f. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $F = \{ u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} + u_n = 0\}$
g. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $F = \{ u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3} = u_n \}$

15.17 Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b, c)\in\mathbb{C}^3.$$

Montrer que F est un espace vectoriel et préciser sa dimension

15.18 Dans $\mathbb{R}^3$, a-t-on $\text{Vect}\{(2, 3, -1), (3, 7, 0)\} = \text{Vect}\{(1, -1, -2), (5, 0, -7)\}$?

Supplémentaire en dimension finie

♥ **15.19** Dans $E = \mathbb{R}^4$, on donne les SEV F et G suivants:
$F = \{ (x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4, x = y = z \}$ et $G = \{ (x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$
a) Donner les dimensions respectives de F, de G, de $(F\cap G)$ et de $(F + G)$.
b) Déterminer un supplémentaire de F dans E.
c) Existe-t-il un SEV H supplémentaire commun à F et à G dans E?

♥ **15.20** Dans $E = \mathbb{R}^3$ Déterminer une base puis un supplémentaire du SEV F dans les cas suivants:
a) $F = \text{Vect}((1,1,0); (2,1,1))$
b) $F = \text{Vect}((-1,1,0); (2,0,1); (1,1,1))$
c) $F = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 | 3x - 2y + z = 0\}$
d) $F = \{(\alpha, -\alpha, 2\alpha), \alpha\in\mathbb{R}\}$

15.21 On pose $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f\in E | \forall x\in\mathbb{R}, f''(x) + 4f(x) = 0\}$ et $G = \{f\in E | \int_0^{\pi/2} f(t)dt = f(0) = 0\}$.

a. Montrer que F est un SEV de dimension finie et préciser sa dimension.
b. Montrer que G est un SEV de E et que F et G sont supplémentaires dans E
c. G est-il de dimension finie ?

♥ **15.22** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère : $P = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3, x + 2y - z = 0\}$ et $D = \text{Vect}(w)$ où $w = (1, 0, -1)$.

Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

15.23 ***Hyperplan***
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $(n - 1)$.
a. Donner un exemple d'hyperplan dans $\mathbb{R}^3$ puis dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts c'est-à-dire des sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$ tels que $H_1 \neq H_2$. Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.
c. Soit H un hyperplan de E. Montrer que $\forall u\in E$, si $u\notin F$ alors $F\oplus\text{Vect}(u) = E$
S'inspirer du
d. Soit H et H' deux hyperplans de E, montrer qu'ils possèdent un supplémentaire en commun.
e. Soit H un hyperplan de E et G un SEV de E non inclus dans H,
montrer que $\dim (H\cap G) = \dim G - 1$.

Rang d'une famille de Vecteurs

♥ **15.24** Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes:
a) $\mathcal{F} = ((3,2,1,4); (-1,0,1,2); (1,1,1,3))$ dans $E = \mathbb{R}^4$.
b) $\mathcal{F} = ((1,2,0); (3,-1,3); (a,2a, (1-a))$ dans $E = \mathbb{R}^3$ avec $a\in\mathbb{R}$.
c) $\mathcal{F} = (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, x\mapsto \text{ch}(x), x\mapsto \text{sh}(x))$ dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

♦ **15.25** Soit f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$.
Déterminer le rang de la famille $F = (f, g, f\circ f, f\circ g, g\circ f, g\circ g)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

15.26 Montrer que la famille ((1,0,…,0), (1,1,0,…,0), …, (1,1,….1)) est une base de $\mathbb{R}^n$.

15.27 On pose $E = \mathbb{R}^3$ et on définit les Vecteurs : $x_1 = (1, -1, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$, $x_3 = (0, 1, -1)$ et $x_4 = (1, 1, 1)$.

a. La famille (x_1, x_2, x_3) est-elle libre ? Si oui, est-ce une base de E ? Dans ce cas, déterminer les coordonnées de x_4 dans cette base. Si la famille n'est pas libre, exprimer x_3 en fonction de x_1 et de x_2.

b. Préciser le rang de la famille (x_1, x_2, x_3, x_4).

c. La famille (x_3, x_4) est-elle libre ? Si oui, la compléter en une base E.

d. Soit $G = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$. Montrer que G est un sous-espace Vectoriel de E, en donner une base et un supplémentaire.

15.28 On pose $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f\in E \mid \forall x\in\mathbb{R}, f''(x) + 4f(x) = 0\}$ et $G = \{f\in E \mid \int_0^{\pi/2} f(t)dt = f(0) = 0\}$.

a. Montrer que F est un SEV de dimension finie et préciser sa dimension.

b. Montrer que G est un SEV de E et que F et G sont supplémentaires dans E

c. G est-il de dimension finie ?

15.29 ***Hyperplan***

Soit E un espace Vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace Vectoriel de E de dimension $(n - 1)$.

a. Donner un exemple d'hyperplan dans $\mathbb{R}^3$ puis $M_2(\mathbb{R})$.

b. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts c'est-à-dire des sous-espaces Vectoriels de E de dimension $n - 1$ tels que $H_1 \neq H_2$. Montrer que : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

c. Soit H un hyperplan de E. Montrer que $\forall u\in E$, si $u\notin F$ alors $F\oplus \mathrm{Vect}(u) = E$

d. Soit H et H' deux hyperplans de E, montrer qu'ils possèdent un supplémentaire en commun.

e. Soit H un hyperplan de E et G un SEV de E non inclus dans H,
montrer que $\dim (H\cap G) = \dim G - 1$.

15.30 Vrai ou Faux ?

1. Soit E un $\mathbb{K}$ - EV de dimension finie n avec $n \geq 1$

① De toute famille libre dans E on peut extraire une base de E.
② Une famille génératrice de E contient au moins n Vecteurs.
③ De toute famille génératrice de E on peut extraire une base de E.
④ Une famille libre dans E contient au moins n Vecteurs.
⑤ Une famille génératrice de E peut se compléter en une base de E.
⑥ Il existe une base de E contenant n Vecteurs.
⑦ Une famille libre peut être complétée en une base de E.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, F et G deux SEV de E de dimensions respectives 3 et 4.

① $F\times G$ est de dimension 12.

② F + G est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 7.

③ $n \geq 4$
④ Si n = 7 alors F et G sont supplémentaires.
⑤ Si n = 4 alors F est le supplémentaire d'un sous-espace de dimension 1.
⑥ F admet une infinité de supplémentaires.