

Programme de colles-semaine 21- 11/03 au 15/03

I. Espaces vectoriels

- Définition et vocabulaire: vecteurs, scalaires, famille de vecteurs, vecteurs colinéaires, combinaisons linéaires, règles de calcul.
 - Exemples de référence: vecteurs du plan et de l'espace, \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n , $\mathfrak{F}(X,E)$ où X est non vide et E est un espace vectoriel, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 - Sous-espace vectoriel (SEV): définition et caractérisation, exemples.
 - L'intersection de deux SEV est un SEV, sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
 - Somme de deux SEV, $F + G$ est le plus petit SEV contenant $F \cup G$, somme directe, sous-espaces supplémentaires, caractérisation.
- Exemples à connaître : Les fonctions paires et les fonctions impaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les matrices symétriques et antisymétriques des $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sont des SEV supplémentaires.
- Familles génératrices: définition, exemples, propriétés.
 - Familles libres, liées: Définition, exemple, caractérisation d'une famille liée par un des vecteurs est CL des autres.
 - Bases: Définition, exemples, caractérisation par l'existence et l'unicité de la décomposition dans la base, coordonnées d'un vecteur dans une base, base adaptée à une somme directe.
 - Espace vectoriel de dimension finie : définition, exemples, théorème de la base extraite et de la base incomplète, existence de base en dimension finie.
 - Cardinal d'une famille libre en dimension n , théorème de la dimension, familles libres et familles génératrice dans un espace de dimension n , exemples de référence, espace produit.
 - Sous-espaces vectoriels en dimension finie, dimension d'une sev, existence d'un supplémentaire, formule de Grassmann, caractérisation des supplémentaires en dimension finie.
 - Rang d'une famille de vecteur, cas des familles libres et des familles génératrices.

II. Polynômes.

- Définition, degré, vocabulaire
 - Somme et multiplication par un scalaire, degré de $P + Q$ et de λP .
 - Produit de deux polynômes, définition et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
 - Ecriture formelle, règles de calcul : associativité, élément neutre, commutativité, loi intègre, distributivité, binôme, Bernoulli.
 - Fonction polynomiale associée, évaluation en un scalaire, polynôme de matrice
 - Composition de deux polynômes, exemples usuels.
 - $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un K-EV de dimension infinie, toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
-

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Définition et caractérisation de deux SEV supplémentaires et traiter un exemple (dimension finie ou non).
- Définition d'une famille libre et traiter un exemple (éventuellement par récurrence)
- Énoncé et preuve de la formule de Grassmann.
- Preuve de toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

② Exercices d'algèbre linéaire.

Pas de représentations matricielles.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10