

Chapitre 15 - Espace vectoriel - résumé de cours

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Complément : notion de groupe

Def: Soit E un ensemble, on appelle loi de composition interne sur E toute application de E^2 dans E . Si la loi est notée $\star$, l'application correspondante est $(x, y) \mapsto x \star y$.

Exemples:

- $+$ et $\times$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- $+$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\times$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- La composition, notée $\circ$, dans l'ensemble $\mathcal{F}(E, E) = E^E$.

Contre-exemples:

- $-$ dans $\mathbb{N}$
- La multiplication d'une fonction par un réel.

Def: Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $\star$.

On dit que $(G, \star)$ est un groupe lorsque $\star$ vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $\star$ est associative
- (2) $\star$ admet un élément neutre
- (3) Tout élément de G est inversible pour $\star$

Si de plus $\star$ est commutative alors G est un groupe commutatif ou abélien.

Exemples et contre-exemples

- Exemples de groupes additifs: $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{R}, +)$ $(\mathbb{C}, +)$
- Exemples de groupes multiplicatifs: $(\mathbb{R}^*, \times)$ $(\mathbb{C}^*, \times)$
- $(\mathbb{N}, +)$ $(\mathbb{R}, \times)$, $(\mathbb{Z}^*, \times)$ ne sont pas des groupes.
- $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$ est un groupe mais pas $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \circ)$
- Les matrices carrées d'ordre n inversibles forment un groupe pour le produit matriciel appelé groupe linéaire et noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Notations:

Si la loi est notée $+$, l'élément neutre est noté 0_E et le symétrique de x est noté $-x$

Si la loi est notée $\times$, l'élément neutre est noté 1_E et le symétrique de x est noté $1/x$ ou x^{-1} .

2. Notion d'espace vectoriel et exemples de référence:

2.1 Définition et vocabulaire:

Def: Soit E un ensemble muni de deux lois

une loi interne $(x, y) \in E^2 \mapsto x + y \in E$

une loi externe $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda \cdot x \in E$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K}$ -EV.) si et seulement si

- $(E, +)$ est un groupe abélien
- La loi externe vérifie, $\forall x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,
 - (i) $1 \cdot x = x$
 - (ii) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
 - (iii) $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
 - (iv) $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

Vocabulaire: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -EV.

★ Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et peuvent être notés x ou $\vec{x}$, l'élément neutre de E est alors noté 0_E ou $\vec{0}_E$.

★ Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les **scalaires**.

Proposition 15.1: Règles de calcul dans les $\mathbb{K}$ -EV.

$$\forall x \in E, 0 \cdot x = 0_E \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$$

$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E$$

$$\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x \quad \text{opposé de } x \text{ pour la loi } +$$

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y \text{ et } (\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$$

Def : Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de scalaires, le

vecteur $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ est un vecteur de E appelé combinaison linéaire des

vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$

Cas particulier : Deux vecteurs x et y sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.

Notons que 0_E est colinéaire à tous les vecteurs de E car $\forall x \in E, 0 \cdot x = 0_E$

2.2 Exemples de référence:

★ Les ensembles des vecteurs du plan et de l'espace munis de l'addition vectorielle et de la multiplication par un réel sont des $\mathbb{R}$ -EV.

★ $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$ -EV avec les lois suivantes:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \text{ le vecteur nul est } (0, 0)$$

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \text{ et } \lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \text{ le vecteur nul est } (0, 0, 0)$$

★ $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -E.V.

★ $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ -E.V. et un $\mathbb{C}$ -EV

Remarque: Tout $\mathbb{C}$ -E.V. est un $\mathbb{R}$ -E.V.

★ Soit X un ensemble non vide, et $\mathbb{K}$ -E un espace vectoriel $\mathfrak{F}(X, E)$ muni des opérations usuelles sur les applications est un $\mathbb{K}$ -EV.

Pour $X = \mathbb{N}$, et $E = \mathbb{K}$, on obtient que l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni des opérations usuelles est un $\mathbb{K}$ -EV.

Pour $X = I$ intervalle de $\mathbb{R}$ et $E = \mathbb{K}$, on obtient que les fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munies des opérations usuelles forment un $\mathbb{K}$ -EV.

★ Les matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ munies de l'addition matricielle et de la multiplication par un scalaire forment un $\mathbb{K}$ -EV.

2.3 Espace vectoriel produit:

Proposition 15.2: Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -E.V., l'ensemble $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$ muni des lois:

$$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } \forall x \in E, \forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

Remarque: On retrouve que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$ -EV mais aussi que $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$ -EV.

Extension: Par récurrence immédiate, si $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de $\mathbb{K}$ -E.V. alors le produit

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est encore un $\mathbb{K}$ -E.V.

C'est donc le cas de $\mathbb{R}^3$ et plus généralement, pour $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}^n$ avec les opérations suivantes :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \text{ et } \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

le vecteur nul est $(0, 0, \dots, 0)$

3. Sous-espace vectoriel:

3.1 Définition, caractérisations, exemples:

Def: Soit E un $\mathbb{K}$ -E.V. et F une partie de E . F est un sous-espace vectoriel (SEV) de E ssi

- F est non vide
- F est stable par la loi $+$
- F est stable par la loi $\cdot$.

Dans la pratique, on utilise les caractérisations suivantes:

$$\textcircled{1} F \text{ est un S.E.V. de } E \Leftrightarrow 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) \in F$$

ou F contient le vecteur nul et est stable par combinaison linéaire.

$$\textcircled{2} F \text{ est un S.E.V. de } E \Leftrightarrow 0_E \in F \text{ et } \forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda \cdot x + y) \in F$$

NB: si $0_E \notin F$ alors F n'est pas un SEV.

Exemples:

★ Soit E un $\mathbb{K}$ -E.V., les parties $\{0_E\}$ et E sont des SEV. de E , dits triviaux.

★ Considérons I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, les ensembles suivants sont des SEV de E :

$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions continues sur I

$\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ ensemble des fonctions dérivables sur I .

★ $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n , contient les S.E.V. suivants :

Ensemble des matrices diagonales : $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

Ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) : $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

♥ Exercice résolu : méthode 1

$\textcircled{1}$ Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 3y + z = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$

$\textcircled{2}$ Montrer que $G = \{(2t, t, 3t), t \in \mathbb{R}\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$

$\textcircled{3}$ Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forment un SEV de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Dans la pratique: Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -EV E , alors F muni des restrictions des lois $+$ et $\cdot$, est lui-même un $\mathbb{K}$ -EV.

Dans les problèmes, pour montrer qu'un ensemble est un EV. on montrera de préférence qu'il est un S.E.V. d'un espace vectoriel de référence.

3.2 Sous-espace vectoriel engendré par n vecteurs de E

Proposition 15.3 et def: Soit E un $\mathbb{K}$ -E.V. et $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ une partie finie de E .

La partie de E définie par $\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel engendré par A .

Remarque: $\text{Vect}(A)$ est le plus petit SEV contenant A , au sens de l'inclusion

Vocabulaire :

★ Si $A = \{u\}$ alors $\text{Vect}(A) = \{k.u, k \in \mathbb{K}\}$ est la **droite vectorielle** engendrée par u .

★ Si $A = \{u, v\}$ avec u et v **non colinéaires**, alors $\text{Vect}(A) = \{\lambda u + \mu v, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ est le **plan vectoriel** engendré par $\{u, v\}$.

♥ Exercice résolu : méthode 2

① Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - 3y + z = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$

② Montrer que $G = \{(2t, t, 3t), t \in \mathbb{R}\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$

③ Montrer que les solutions de $y'' - 3y' + 2y = 0$ forment un SEV de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

3.3 Intersection de sous-espaces:

Proposition 15.4: Soit E un $\mathbb{K}$ -E.V. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de E .

Extension: Par récurrence immédiate, si $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille de S.E.V. de E , leur intersection

$\bigcap_{i=1}^n F_i$ est encore un SEV de E .

3.4 Somme de deux sous-espaces:

En général, $F \cup G$ n'est pas un S.E.V. de E , on introduit donc la notion suivante :

Def: Soit F et G deux SEV d'un $\mathbb{K}$ -E.V. noté E , on appelle somme de F et de G la partie de E définie par $F+G = \{x+y, x \in F, y \in G\}$.

Proposition 15.5 : $F+G$ est un SEV de E et c'est le plus petit SEV contenant $F \cup G$, au sens de l'inclusion.

Dans la pratique : Soit $x \in E$, $x \in F+G$ si et seulement si $\exists x_F \in F, \exists x_G \in G, x = x_F + x_G$

Def: Soit F et G deux S.E.V. d'un $\mathbb{K}$ -E.V. E .

• On dit que F et G sont en somme directe lorsque tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Dans ce cas, la somme est notée $F \oplus G$ ou lieu de $F+G$.

• On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsqu'ils sont en somme directe et que $F \oplus G = E$, c'est à dire : $\forall x \in E, \exists ! x_1 \in F, \exists ! x_2 \in G, x = x_1 + x_2$

Proposition 15.6: Soit F et G deux S.E.V. d'un $\mathbb{K}$ -E.V. E .

① F et G sont en somme directe ssi $F \cap G = \{0_E\}$

② F et G sont supplémentaires ssi $[E = F+G \text{ et } F \cap G = \{0_E\}]$

Dans la pratique : Pour montrer que F et G sont supplémentaires, on a deux méthodes possibles :

• Montrer que $E = F+G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

• Montrer que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et de G

Exemples de S.E.V. supplémentaires à connaître:

① Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires, on a $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$

② $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ d'après l'unicité de l'écriture d'un complexe sous forme algébrique.

③ Les matrices symétriques et antisymétriques forment deux S.E.V. supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou encore $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

⚠ Attention: supplémentaire ne signifie pas complémentaire.

4. Familles de vecteurs

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille de n vecteurs de E , $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle sous-famille de $\mathcal{F}$ toute famille extraite de $\mathcal{F}$ (on enlève des vecteurs en conservant l'ordre de $\mathcal{F}$) et sur famille de $\mathcal{F}$ toute famille dont $\mathcal{F}$ est une sous-famille (on rajoute des vecteurs en conservant l'ordre de $\mathcal{F}$).

4.1 Familles génératrices:

Def: Soit F un SEV de E et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de F .

On dit que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F lorsque $F = \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$

Vocabulaire: On dit aussi que $\mathcal{F}$ engendre F .

Remarque: Il n'y a pas unicité de la famille génératrice.

Dans la pratique : Pour montrer que $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice de F , on montre que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \in F$ et

$$\forall \vec{x} \in F, \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Proposition 15.7: Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de F .

- ① On obtient une autre famille génératrice de F en permutant les éléments d'une famille génératrice.
- ② Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice alors toute sur-famille de $\mathcal{F}$ est encore génératrice.
- ③ On ne peut pas enlever un vecteur d'une famille génératrice sans risquer de perdre le caractère générateur sauf s'il est une combinaison linéaire des autres

4.2 Familles libres, familles liées:

Def: La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre dans E lorsqu'on a l'implication suivante:

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

ou encore l'équation $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$ admet $(0, 0, \dots, 0)$ comme unique solution dans $\mathbb{K}^n$,

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Vocabulaire: Si $\mathcal{F}$ est libre alors on dit que les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont linéairement indépendants et si $\mathcal{F}$ est liée, on dit que les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ sont linéairement dépendants.

Proposition 15.8: La famille $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E est liée ssi un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Conséquences:

- ★ Toute famille contenant deux vecteurs colinéaires est liée.
- ★ Toute famille contenant 0_E ou une répétition est liée.
- ★ Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.
- ★ Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- ★ Toute famille obtenue par permutation des éléments d'une famille libre est libre
- ★ Si $x \neq 0_E$ alors (x) est libre dans E .
- ★ (x, y) est libre dans E ssi x et y ne sont pas colinéaires.

Proposition 15.9: Soit $\mathcal{L} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ une famille libre de E et v un vecteur de E .

$\mathcal{F} = \{e_1, \dots, e_p, v\}$ est libre ssi $v \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$.

Dans la pratique: On ne peut pas rajouter un vecteur à une famille libre sans risquer de perdre la liberté sauf si ce vecteur n'est pas combinaison linéaire des autres.

4.3 Bases d'un sous-espace vectoriel:

Def: Soit F un SEV de E . On dit que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F lorsque $\mathcal{B}$ est à la fois libre dans E et génératrice de F .

Remarque: Si E admet une base $\mathcal{B}$, n'y a pas unicité de cette base, en particulier on a encore une base en permutant les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exemples à connaître.

$((1,0), (0,1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$.

$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1))$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Théorème 15.1 et définition: Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de F .

$\mathcal{B}$ est une base de F si et seulement si tout vecteur $\vec{x}$ de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$ ou encore,

$$\forall x \in F, \exists ! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Les scalaires λ_i sont les coordonnées ou composantes de x dans $\mathcal{B}$.

Attention: les coordonnées dépendent de la base choisie. Il faut faire attention à l'ordre des vecteurs de la base quand on donne les coordonnées.

Corollaire: Soit F de base $\mathcal{B}_1$ et G de base $\mathcal{B}_2$ deux sous-espaces vectoriels de E .

$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ obtenue en concaténant les bases de F et de G est une base de E ssi $E = F \oplus G$.

Vocabulaire : On dit que les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont adaptées à somme directe.

5. Espace vectoriel de dimension finie

5.1 Définition.

Def: On dit qu'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est de dimension infinie.

Convention: $E = \{0_E\}$ est de dimension finie.

Exemples: $\mathbb{R}^2$ (le plan), $\mathbb{R}^3$ (l'espace), $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

5.2 Existence de base en dimension finie

Théorème 15.2 dit de la base extraite : Soit E non nul et de dimension finie. De toute famille génératrice finie $\mathcal{G}$, on peut extraire une base de E .

Preuve : On prouve l'algorithme suivant :

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{G}$

Tant que $\mathcal{B}$ est liée faire

On cherche un vecteur v de $\mathcal{B}$ combinaison linéaire des autres.

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \setminus \{v\}$

Afficher $\mathcal{B}$

Corollaire: Tout $\mathbb{K}$ - espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

Théorème 15.3 dit de la base incomplète Soit E non nul et de dimension finie. Toute famille libre $\mathcal{L}$ peut se compléter pour donner une base de E .

Preuve : On prouve l'algorithme suivant : Soit $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E .

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{L}$

Pour k allant de 1 à n faire

Si $e_k \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$ alors

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{e_k\}$

Afficher $\mathcal{B}$

Dans la pratique: On peut fabriquer une base de E des deux manières suivantes:

- ★ En enlevant des vecteurs à une famille génératrice jusqu'à avoir une famille libre.
- ★ En complétant une famille libre avec des vecteurs qui ne sont pas combinaison linéaire des précédents, jusqu'à avoir une famille génératrice.

5.3 Dimension d'un espace vectoriel.

Lemme de la dimension: Soit E un $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie. Si E admet une base de cardinal p alors toute famille d'au moins $(p + 1)$ vecteurs de E est liée.

Démonstration : Il suffit de le montrer pour $p + 1$ vecteurs

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

On considère une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E.$$

On a pour tout k entre 1 et $p + 1$, $u_k = a_{k,1} e_1 + \dots + a_{k,p} e_p$.

En injectant dans l'égalité précédente et en identifiant on obtient un système homogène

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{2,1} + \dots + \lambda_{p+1} a_{p+1,1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{1,p} + \lambda_2 a_{2,p} + \dots + \lambda_{p+1} a_{p+1,p} = 0 \end{cases}$$

de p équations à $(p + 1)$ inconnues. Ce système a une infinité de solutions donc la famille est liée.

Conséquence: Si on a une base de cardinal p alors les familles libres sont de cardinal au plus p et les familles génératrices sont de cardinal au moins p .

Théorème 15.4 dit de la dimension : Soit E non nul et de dimension finie, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ sont deux bases de E alors $n = p$.

Def : Soit E un EV de dimension finie.

La dimension de E est l'entier naturel noté $\dim E$ défini par :

- $\dim E = 0$ si $E = \{0_E\}$
- $\dim E$ est le cardinal de toutes les bases de E sinon.

Exemples à connaître :

- ★ $\dim \mathbb{K} = 1$ mais, attention, en tant que $\mathbb{R}$ -ev, $\dim \mathbb{C} = 2$.
- ★ Un $\mathbb{K}$ -ev de $\dim 1$ est une droite vectorielle, un $\mathbb{K}$ -ev de $\dim 2$ est un plan vectoriel.
- ★ $\dim \mathbb{K}^n = n$ en tant que $\mathbb{K}$ -EV
- ★ $\dim \mathcal{M}_{n,p} = np$
- ★ Si E et E' sont de dimension finie alors $E \times E'$ aussi et $\dim E \times E' = \dim E + \dim E'$

Proposition 15.10: Caractérisation des bases: Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n .

- ① Toute famille libre est de cardinal au plus n et si $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n alors $\mathcal{F}$ est une base de E .
- ② Toute famille génératrice est de cardinal au moins n et si $\mathcal{F}$ est génératrice et de cardinal n alors $\mathcal{F}$ est une base de E .

Dans la pratique: Si $\dim E = n$, alors pour montrer qu'une famille de cardinal n est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre ou bien qu'elle est génératrice.

Exercice: Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{I}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont de dimension infinie

6. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Def : On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie si l'espace vectoriel F est de dimension finie.

Exercice résolu : Donner la dimension des SEV suivants :

- ① $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$
- ② $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f'' - 3f' + f = 0\}$
- ③ $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0\}$

Retenons :

- Les ensembles de solutions des EDL homogènes sont des EV de dimension 1 pour les EDL1 et de dimension 2 pour les EDL2
- L'ensemble des suites qui vérifient une SRL2 est un EV de dimension 2.

Proposition 15.11: Soit E de dimension finie.

- ① Tout SEV F de E est aussi de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$
- ② Si F est un SEV de E tel que $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

6.2 Supplémentaire en dimension finie

Proposition 15.12: Existence d'un supplémentaire en dimension finie

Soit E de dimension finie, tout SEV F de E admet un supplémentaire G dans E et $\dim E = \dim F + \dim G$.

Dans la pratique:

- ★ Le SEV engendré par des vecteurs qui complètent une base de F pour obtenir une base de E est un supplémentaire de F dans E .
- ★ Il n'y a pas unicité du supplémentaire: Soit P un plan $\mathbb{R}^3$, toute droite vectorielle D non incluse dans P est supplémentaire à P dans $\mathbb{R}^3$. *Faire une figure*

Théorème 15.5: Formule de Grassmann

Soit E de dimension finie et F et G deux SEV de E .

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Corollaire: Caractérisation des supplémentaires en dimension finie.

Soit E de dimension finie et F et G deux SEV de E .

- ① $F \oplus G = E \Leftrightarrow E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$
- ② $F \oplus G = E \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$

6.3. Rang d'une famille de vecteur

Def: Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E . Lorsque le sous-espace F engendré par $\mathcal{F}$ est de dimension finie, sa dimension est le rang de la famille $\mathcal{F}$ noté $\text{rg}(\mathcal{F})$.

C'est-à-dire, sous réserve d'existence, $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Dans la pratique : le rang de $\mathcal{F}$ est le cardinal de la plus grande famille libre que l'on peut extraire de $\mathcal{F}$.

Proposition 15.13 : Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ dans E de dimension n

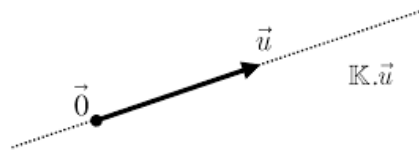
- ① $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq n$ et $[\text{rg}(\mathcal{F}) = n \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E]$.
- ② $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq p$ et $[\text{rg}(\mathcal{F}) = p \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est libre dans } E]$.
- ③ $\text{rg}(\mathcal{F}) = n = p \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base de } E$
- ④ $\text{rg}(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{u} \in \mathcal{F}, \vec{u} = \vec{0}$

Dans la pratique : On modifie pas le rang d'une famille de vecteurs si :

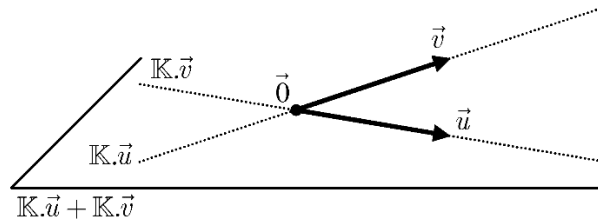
- ★ On supprime un vecteur nul ou un vecteur figurant plusieurs fois (en laissant au moins un exemplaire de ce vecteur !).
- ★ On permute les vecteurs de la famille.
- ★ On multiplie un vecteur par un scalaire **non nul**.
- ★ On ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des **autres** vecteurs.
- ★ On enlève un vecteur combinaison linéaire des **autres** vecteurs.

Annexe : Quelques représentations

① Droite vectorielle :

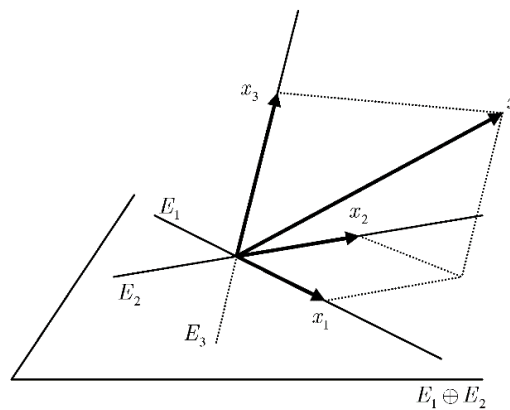


② Plan vectoriel :



③ Somme directe : E_1 et E_2 sont en somme directe :

$\forall v \in E_1 + E_2, \exists ! x_1 \in E_1, \exists ! x_2 \in E_2, v = x_1 + x_2.$



Remarque : Ici on a aussi E_1 , E_2 et E_3 en somme directe.

④ Sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$

$\forall w \in E, \exists ! u \in F, \exists ! v \in G, w = u + v$

