

Programme de colles-semaine 22- 25/03 au 29/03

I. Espaces vectoriels

II. Polynômes.

- Définition, degré, vocabulaire
 - Somme et multiplication par un scalaire, degré de $P + Q$ et de λP .
 - Produit de deux polynômes, définition et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
 - Ecriture formelle, règles de calcul : associativité, élément neutre, commutativité, loi intègre, distributivité, binôme, Bernoulli.
 - Fonction polynomiale associée, évaluation en un scalaire, polynôme de matrice
 - Composition de deux polynômes, exemples usuels.
 - $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un K-EV de dimension infinie, toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
 - Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, théorème de division euclidienne, algorithme et justification.
 - Dérivation: polynôme dérivé, propriétés de calcul, dérivation successive, formule de Leibniz, formule de Taylor. Application $(1, (X-a), \dots, (X-a)^n)$ base de $\mathbb{K}_n[X]$ et division euclidienne de P par $(X-a)^k$.
 - Racines d'un polynôme : définition et caractérisation : α racine de P ssi $(X-\alpha)$ divise P .
Généralisation à k racines distinctes. Conséquences:
 - Si P est de degré n alors P possède au plus n racines distinctes.
 - Si P de degré n a $(n+1)$ racines distinctes alors $P = 0$.
 - Si P possède une infinité de racines alors $P = 0$.
 - Ordre de multiplicité d'une racine : α est racine de P d'ordre de multiplicité m lorsque $(X-\alpha)^m$ divise P et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P c'est à dire il existe un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$
Caractérisation: α racine de P d'ordre m ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
Conséquence: P de degré n a au plus n racines comptées avec leur ordre de multiplicité.
 - Polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, Théorème de d'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, cas de $X^n - 1$.
-

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Enoncé et preuve de la formule de Grassmann.
- Preuve de toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
- Enoncé et preuve de la formule de Taylor
- Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

② Exercices sur les polynômes

Les exercices peuvent utiliser des outils d'analyse ou d'algèbre linéaire.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Prévision : Analyse asymptotique.