

Exercices-Chapitre 17: Comparaison locale de fonctions, DL

♦ Éléments de correction en ligne - ♥ A savoir refaire.

Relation de comparaison

17.1 Justifier les comparaisons suivantes :

a. $f : x \mapsto x^{-\frac{5}{2}} \ln^2(x)$, $g : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^3}$, et $h : x \mapsto e^{-2x}$ sont négligeables devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ b. $f : x \mapsto x\sqrt{\ln(x)}$, $g : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$ sont négligeables devant $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0

17.2 VRAI ou FAUX

a. Si $f \sim_a g$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$ b. Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$ alors $f \sim_a g$.♥ 17.3 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 puis en $+\infty$: $f(x) = x + \sqrt{x}$ $g(x) = x + 1 + \ln x$ $h(x) = \ln x + (\ln x)^2$ $k(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ $m(x) = e^x + \sin x$

♥ 17.4 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0:

a. $f(x) = \tan x \ln^2(1+x)$ $g = \frac{(e^x - 1)^2}{(1+x)^5 - 1}$ $h(t) = \sqrt{\frac{sh(t)}{t^2 + t}}$ b. $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ $g(t) = \ln(\cos t)$ $h(x) = \frac{\tan(2x^2)}{\sqrt{1-x^2} - 1}$ ♥ 17.5 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en $+\infty$:a. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^4 - x^2}{(x^2 + x)^3}$ $g(x) = x \left(e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right)$ $h(x) = x^4 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x^4$ b. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} - 1$ $g(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}$ $h(x) = \operatorname{ch}(x)$

17.6 Règle du logarithme

a. Démontrer que: si $u \sim_a v$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+$, $\ell \neq 1$ ou $\ell = +\infty$ alors $\ln \circ u \sim \ln \circ v$ b. Donner un équivalent simple en 0 de $f(x) = \ln(\ln(x+1))$ et de $g(x) = \ln(\sin x)$.c. Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.♦ 17.7 A l'aide d'un encadrement, donner un équivalent de $\arctan(x+1) - \arctan(x)$ en $+\infty$.Indic : $\arctan(x+1) - \arctan(x) = f(a) - f(b)$ 17.8 Pour chaque exemple donner les valeurs du réel α telles que $f(t) = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ a. $f(t) = \ln(1 + t^2)$ avec $a = 0$ b. $f(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ avec $a = +\infty$ c. $f(t) = \frac{\ln^2 t}{\sqrt{t(t^2+1)}}$ avec $a = +\infty$ d. $f(t) = \frac{\ln^2 t}{\sqrt{t(t^2+1)}}$ avec $a = 0$ e. $f(t) = t^3 e^t$ avec $a = -\infty$ f. $f(t) = \frac{\sin(2t)}{t^2}$ avec $a = 0$ 17.9 Donner un équivalent simple en $\pi/2$ de $\cos$ et de $f(x) = \frac{1}{\cos x} - \tan x$

Utilisation dans les problèmes♥ **17.10** Déterminer la limite de f en a à l'aide d'équivalents:

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$, $a = 0$

b. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$, $a = \frac{\pi}{2}$

c. $f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $a = 0$

d. $f(x) = (1 - e^{-x})^{2x^2}$, $a = +\infty$

e. $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$, $a = 1$

f. $f(x) = \frac{\ln(1+2\tan x)}{\sin x}$, $a = 0$

♦ **17.11** Même exercice :

a. $f(x) = \dots$, $a = 0$

b. $f(x) = \tan x \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $a = \pi$

c. $f(x) = \frac{1-e^x}{1-2^x}(1-\cos x)$, $a = 0$

d. $f(x) = \left(\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)^{1/x}$, $a = 0$

e. $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\sin x}-1}$, $a = 0$

f. $f(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$, $a = +\infty$

17.12 Donner l'ensemble de définition de la fonction définie par $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\ln x}$, et étudier sa continuité sur cet ensemble. Peut-on la prolonger par continuité ?

♦ **17.13** Soit $a, b > 0$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$ **Calculs de DL**♥ **17.14 Opérations algébriques et composition**

a. $DL_4(0)$ de: $2\cosh(x) - 3\sqrt{1+x}$, $e^x \ln(1+x)$, $\frac{\tan x - \sin x}{1+x}$.

b. $DL_4(0)$ de: $\ln(1+\sin x)$, $\cos(x\sqrt{1+x})$, $e^{\cos x}$

c. $DL_2(0)$ de: $(\sqrt{1+x})^x$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

♥ **17.15 Quotient:**

a. $DL_3(0)$ de: $\frac{1}{1+x+x^3}$, $\frac{1+x}{3+x^2}$, $\frac{\arctan(x) - \sin x}{\cos x}$

b. $DL_3(0)$ de: $\frac{x}{\ln(1+x)}$, $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$.

♥ **17.16 Intégration:**

a. $DL_4(0)$ de $\arcsin x$ et de $\ln(\cos x)$

b. Montrer que $\forall a > 0$, $x \mapsto \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$ admet un DL à tout ordre en 0 et le déterminer.

♦ **17.17** Donner les $DL_3(0)$ de :

$$\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}, \quad \frac{\ln^2(1+x)}{e^x - 1}, \quad \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right), \quad \frac{1}{\tanh x} - \frac{1}{\tan x}, \quad (x+1)^{\frac{1}{x}} \text{ et } \ln(3e^x + e^{-x})$$

17.18 Donner un DL à l'ordre n en a dans les cas suivants

$$\sin x \text{ en } a = \frac{\pi}{3}, n = 3 \quad e^x \text{ en } a = 1 \text{ et } n \in \mathbb{N} \quad \frac{\ln x}{x^2} \text{ en } a = 1, n = 3 \quad \arctan x \text{ en } a = 1, n = 3$$

17.19 D'autres méthodes pour donner le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.a. Justifier que tangente admet un $DL_5(0)$ et le retrouver en utilisant $\cos x \cdot \tan x = \sin x$ b. En utilisant que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$, retrouver le $DL_5(0)$ de la fonction tangente.♦ **17.20** Utiliser une méthode analogue à la précédente pour retrouver le $DL_5(0)$ de $\arcsin$.

♥ 17.21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N} \ f^{(n)}(0) = 0$ et donner son $DL_n(0)$ en 0.

Vrai ou Faux: Deux fonction admettant le même DL d'ordre n en a sont égales au voisinage de a .

♦ 17.22 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(e^x)$.

- Justifier que f admet un DL à tout ordre en 0.
- On souhaite obtenir le $DL_3(0)$ de f . Peut-on composer les $DL_3(0)$ de $\arctan x$ et e^x ?
- Justifier que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1 + e^{2x}) y' = e^x$.
- En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f''(0)$ et enfin $f'''(0)$.
- Donner le $DL_3(0)$ de f .

17.23 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \exp(x^2)$.

- Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
- a. Quelle est la régularité de f^{-1} sur $\mathbb{R}$? Quelle est sa parité?
- b. Calculer le $DL_5(0)$ de f^{-1} . Indic : exercice 17.20

Utilisation des DL dans les problèmes

17.24 Donner un équivalent simple des fonctions suivantes en 0 :

$$f(x) = \ln(1 + \sin x) - \tan x \quad g(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad h(x) = \sin^2 x - x^2 \sqrt{1 - x^2}$$

17.25 Calculer les limites des fonctions suivantes en 0

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{1}{\sin^4 x} \left[\sin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\sin x}{1+\sin x} \right] \quad h(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$$

17.26 Etude locale d'une fonction

a. On définit f par $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0, étudier la dérivabilité du prolongement et préciser l'allure de la courbe représentative de f au voisinage du point d'abscisse 0.

b. On pose $\forall t \neq 0, f(t) = \frac{\arctan t}{t}$ et $f(0) = 1$. On considère $\phi : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

Justifier que ϕ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ puis montrer qu'elle peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

♦ 17.27 Calcul de dérivées successives Soit $f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{1+x}$, justifier que f est 5 fois dérivable en 0 et calculer les 5 dérivées premières en 0.

17.28 Branches infinies :

En posant $h = \frac{1}{x}$, étudier les branches infinies de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$