Fiche pour le calcul de DL

Eléments théoriques

★ Définition et propriétés

Définition: Soit $f:I\to\mathbb{K}$ et a un réel de I ou une borne de I.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a, noté DLn(a), si et seulement si il existe un polynôme $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ de degré au plus n tel que

$$\forall x\in I, f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k=(x-a)^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \iff f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k \underset{x\to a}{=} o((x-a)^n).$$

Le $DL_n(a)$ de f: $f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}a_k(x-a)^k}_{\text{Partie régulière}}+\underbrace{o_a((x-a)^n)}_{\text{Reste}}$

Propriétés des $DL_n(a)$:
① Si f admet un $DL_n(a)$, celui-ci est unique.
② Si f admet un $DL_n(a)$, alors pour tout entier $p\le n$, f admet un $DL_p(a)$ que l'on obtient en tronquant le $DL_n(a)$ à l'ordre p, c'est à dire.
③ Si f est paire (resp. impaire) et admet un $DL_n(0)$ alors la partie régulière est paire (resp. impaire).

★ DL_n et régularité

Théorème 1: Caractérisation de la continuité et de la dérivabilité en a :
① f admet un $DL_0(a)$ si et seulement si f est continue en a ou prolongeable par continuité en a et dans ce cas, $f(x)\underset{a}{=}f(a)+o(1)$
② f admet un $DL_1(a)$ si et seulement si f, ou son prolongement par continuité en a, est dérivable en a et dans ce cas, $f(x)\underset{a}{=}f(a)+\alpha(x-a)+o(x-a)$ avec $\alpha=f'(a)$

Théorème 2: Formule de Taylor Young : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et a un réel de I alors f possède un $DL_n(a)$ donné par: $\boxed{f(x)\underset{x\to a}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o((x-a)^n)\ ♥}$

Ce théorème assure l'existence d'un DL à tout ordre pour une fonction de classe C^∞.
Il est rarement utilisé comme moyen de calcul des DL.

★ Opérations sur les $DL_n(0)$:

On peut substituer λx^p à x dans un $DL_n(0)$ pour obtenir un $DL_{np}(0)$
On peut faire des combinaisons linéaires et des produits de $DL_n(0)$
On peut composer les $DL_n(0)$ pour obtenir le $DL_n(0)$ de $g\circ f$ si $f(x)\to 0$ quand $x\to 0$
On peut intégrer terme à terme le $DL_n(0)$ d'une fonction continue f pour obtenir le $DL_{n+1}(0)$ d'une primitive F de f. On n'oubliera pas le terme constant F(0).

★ Pour obtenir un $DL_n(a)$: On pose x = a + h pour se ramener au calcul d'un $DL_n(0)$.

★ Pour obtenir un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, on pose $h=\frac{1}{x}$ pour se ramener au calcul d'un $DL_n(0)$.

♥ DL usuels à connaître

$$\frac{1}{1-x}\underset{0}{=}1+x+x^2+..+x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}\underset{0}{=}1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2}\underset{0}{=}1-x^2+x^4+...+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$e^x\underset{0}{=}1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$ch(x)\underset{0}{=}1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$sh(x)\underset{0}{=}x+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x)\underset{0}{=}1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x)\underset{0}{=}x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x)\underset{0}{=}x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha\underset{0}{=}1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n) \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\sqrt{1+x}\underset{x\to0}{=}1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\underset{x\to0}{=}1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\ln(1+x)\underset{0}{=}x-\frac{x^2}{2}+...+(1-)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x)\underset{0}{=}-x-\frac{x^2}{2}-...-\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\arctan(x)\underset{0}{=}x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$