

Programme de colles-semaine 24- 22/04 au 26/04

Analyse asymptotique

- Domination et négligeabilité en a , caractérisation par le quotient, propriétés, compatibilité avec les opérations, comparaison des fonctions usuelles.
- Fonctions équivalentes en a , caractérisation par le quotient, propriétés, équivalents usuels, règles de calcul : produit, exponentiation, quotient, substitution, exemples de recherche d'un équivalent simple pour une somme.
- Propriétés conservées par équivalents : recherche de limite en a et signe au voisinage de a .

- Définition de f admet un DL d'ordre n en a , exemple fondamental : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$,

unicité, troncature, substitution, parité, $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et $DL_{2n}(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.

On se ramène systématiquement à un $DL_n(0)$ en posant $x = a + h$.

- Soit f définie au voisinage de a , f est continue en a ou prolongeable par continuité en a ssi f admet un $DL_0(a)$ et f (ou f prolongée) est dérivable en a ssi f admet un $DL_1(a)$.
- Formule de Taylor-Young (admis ici), DL à tout ordre en 0 de exp, cos, sin et $(1+x)^a$, cas particulier usuels :

$DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ en 0.

- Combinaison linéaire et produit de DL, DL en 0 de ch et sh.
 - Composition de $DL_n(0)$, application au DL de l'inverse d'une fonction admettant un $DL_n(0)$ avec $a_0 \neq 0$, $DL_5(0)$ de tan.
 - Intégration, $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\arctan(x)$.
 - Utilisation des DL pour la recherche d'un équivalent simple, pour le calcul d'une limite, pour une étude locale, pour une étude de branches infinies.
-

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Définition et caractérisations des relations de comparaison o et O
- Équivalents usuels en 0.
- Énoncer la formule de Taylor-Young avec toutes ses hypothèses et l'appliquer pour obtenir le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ ou de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- Donner rapidement le $DL_5(0)$ de $\tan(x)$ par la méthode de son choix.

② Un calcul de DL d'ordre 3 ou 4

Ce sera l'occasion de vérifier la bonne connaissance des DL usuels au verso.

Rappel : Interro de cours le 23 avril

③ Exercice au choix du colleur *qui pourra être le calcul d'une primitive, d'une somme ou d'une dérivée nième nécessitant la décomposition d'une fraction rationnelle dont le dénominateur est scindé à racines simples*

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Prévisions : Applications linéaires.

♥ DL usuels à connaître

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$