

Chapitre 18 – Applications linéaires- résumé

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Généralités

1.1 Def et exemples

Def: Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application de E dans F .

On dit que f est une application linéaire lorsqu'on a :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Exemples

$$\textcircled{1} f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto 2x - 3y \end{cases}$$

$$\textcircled{2} g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x - y, y + z, 3x + z) \end{cases}$$

$$\textcircled{3} h: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto y \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \varphi: \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \psi: \begin{cases} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t) dt \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \text{ La transposition dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\textcircled{7} u: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P^{(k)} \end{cases}$$

$$\textcircled{8} v: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto (X+1)P - P' \end{cases}$$

$$\textcircled{9} \text{Id}_E \text{ et } x \mapsto 0_F$$

Proposition 18.1: Soit $f: E \rightarrow F$, linéaire, u et v deux vecteur de E et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\textcircled{1} f(0_E) = 0_F$$

$$\textcircled{2} f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$\textcircled{3} f(\lambda u) = \lambda f(u) \text{ et pour } \lambda = -1, f(-u) = -f(u)$$

$$\textcircled{4} \forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n, f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(u_i)$$

Contre-exemples:

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x+1, 2y) \end{cases}, f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases} \text{ et } \varphi: \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P' + 3X \end{cases}$$

1.2 Image d'une application linéaire

Proposition 18.2: Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire et G un sous-espace vectoriel de E .
 $H = f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Def : Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire, d'après la proposition précédente, $f(E)$ est un SEV de F noté $\text{Im } f$ et appelé image de f . $\text{Im } f = f(E) = \{ f(u), u \in E \}$

On a $\forall v \in F, v \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists u \in E, v = f(u)$

Proposition 18.3: Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de E et $f: E \rightarrow F$ une application linéaire alors $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$

✎ Exercice : Déterminer $\text{Im } g$

★ Dans la pratique : f est surjective ssi $\text{Im } f = F$.

1.3 Noyau d'une application linéaire

Proposition 18.4 : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et G un SEV de F , l'image réciproque $f^{-1}(G)$ est un SEV de E .

Def : On appelle noyau de f et on note Ker f la partie de E définie par $\text{Ker } f = \{u \in E, f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$. $\text{Ker } f$ contient les antécédents du vecteur nul de F par f . D'après ce qui précède, $\text{Ker } f$ est un SEV de E

✎ **Exercice :** Déterminer $\text{Ker } g$

Dans la pratique : Pour montrer que H est un SEV de E , on peut montrer qu'il est le noyau d'une application linéaire.

Proposition 18.5 : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$

1.4 Opération sur les applications linéaires

Proposition 18.6 Soit f, g deux applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- ① $(f + g)$ est linéaire
- ② λf est linéaire

Corollaire : L'ensemble des applications linéaires de E sur F , noté $\mathcal{L}(E, F)$, muni de la somme et du produit par un scalaire est un $\mathbb{K}$ -EV.

👁 **Preuve :** C'est un SEV des applications de E dans F : Il contient la fonction nulle et est stable par CL

Proposition 18.7 : Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires

- ① $g \circ f : E \rightarrow G$ est une application linéaire
- ② $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g \circ f$ et $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$
- ③ $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$

2. Applications linéaires particulières

2.1 Forme linéaire

Def : Si $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ est une application linéaire, on dit que f est une forme linéaire sur E .

Exemples

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto 2x - 3y \end{cases}, \quad \varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t) dt \end{cases} \quad \text{et } \varphi : P \mapsto P(a) \text{ de } \mathbb{K}[X] \text{ dans } \mathbb{K}$$

2.2 Endomorphisme

Def : Soit $f : E \rightarrow E$ une application linéaire.

- Si $F = E$ alors f est un endomorphisme. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Dans la pratique : Pour montrer que f est un endomorphisme de E il faut montrer que :

- ★ f est linéaire.
- ★ $\forall u \in E, f(u) \in E$ ou encore $\text{Im } f \subset E$

Exemples : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x - y, y + z, 3z) \end{cases}, \quad u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P \mapsto (X+1)P' - P \end{cases}$

et $\varphi_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$ avec A fixée dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice : Soit f un endomorphisme, on dit que $x \in E$ est invariant par f si $f(x) = x$.
Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par f est un SEV de E .

Def : Si f est un endomorphisme de E , $f \circ f$ est un endomorphisme et on peut définir :
 $f^0 = \text{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

$f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc... sont les **itérées** de f .

D'après ce qui précède :

$\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ et $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ et en général, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } f^k \subset \text{Ker } f^{k+1}$ et $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$

Proposition 18.8:

① Soit f, g et h dans $\mathcal{L}(E)$ on a $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ et $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

② Soit f et g dans $\mathcal{L}(E)$ qui commutent c'est à dire tels que $f \circ g = g \circ f$ on a :

Formule du binôme : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(f + g)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^k \circ g^{p-k}$

Egalité de Bernoulli : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^p - g^p = (f - g) \circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k \circ g^{p-1-k} \right)$

Preuve : La structure algébrique de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est la même que celle de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ donc même démonstration.

2.3 Isomorphismes, automorphismes

Def : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire

- Si f est bijective alors f est un isomorphisme de E sur F .
- Si f est bijective et si f est un endomorphisme alors f est un automorphisme, on note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Proposition 18.9: Soit $f : E \rightarrow F$, une application linéaire

- ① f est un isomorphisme ssi $\text{Ker } f = \{0_E\}$ et $\text{Im } f = F$
- ② Si f est un isomorphisme alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E
- ③ Sous réserve d'existence, le composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.
- ④ $\text{GL}(E)$ muni de la composition est un groupe appelé groupe linéaire.

Def: Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -EV. On dit que E et F sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme φ de E sur F , c'est à dire $\varphi : E \rightarrow F$ avec φ linéaire et bijective.

2.4 Homothétie, projecteurs et symétries

a) Homothéties

Def: Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'homothétie (vectorielle) de rapport λ est l'endomorphisme de E défini par $\forall u \in E$, $h_\lambda(u) = \lambda u$.

Propriétés des homothéties:

- ① $h_1 = \text{Id}_E$ et $h_\lambda = \lambda \text{Id}_E$
- ② La composée $h_\lambda \circ h_{\lambda'}$ est l'homothétie $h_{\lambda\lambda'}$.
- ③ $h_\lambda \in \text{GL}(E)$ et $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.

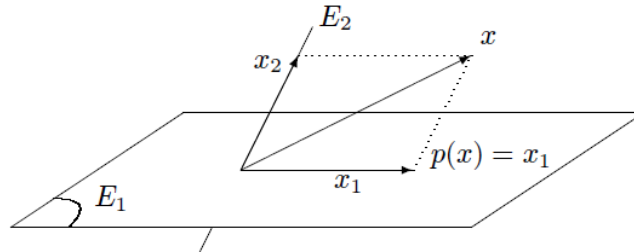
b) Projections et projecteurs

Def: Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

On a $\forall x \in E, \exists ! x_1 \in E_1, \exists ! x_2 \in E_2, x = x_1 + x_2$ donc on peut définir les endomorphismes :

$p: \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 \end{cases}$ projection sur E_1 parallèlement à E_2

$q: \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_2 \end{cases}$ projection sur E_2 parallèlement à E_1



Remarque : p et q sont les projections associées à E_1 et E_2 . On a $p + q = \text{Id}_E$.

Propriétés des projections: Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

- ① $p \in \mathcal{L}(E)$
- ② $p \circ p = p$
- ③ $\text{Ker } p = E_2$ et $\text{Im } p = E_1$
- ④ $E_1 = \{ x \in E, p(x) = x \} = \text{Ker } (p - \text{Id}_E)$

Def: On appelle projecteur toute application f de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = f$

On dit aussi que f est idempotente.

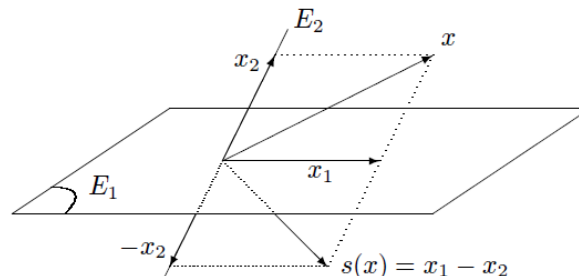
Proposition 18.10: Si f est un projecteur de E alors $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ et f est la projection sur $\text{Im } f$ parallèlement à $\text{Ker } f$.

c) Symétries et involutions

Def: Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

On a $\forall x \in E, \exists ! x_1 \in E_1, \exists ! x_2 \in E_2, x = x_1 + x_2$ donc on peut définir l'endomorphisme:

$s: \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$ la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2



Dans la pratique: Si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , on a $s = 2p - \text{Id}_E$.

Donc il suffit de connaître p pour connaître s et réciproquement.

Propriété des symétries: Soit $E = E_1 \oplus E_2$ et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

① $s \in \mathcal{L}(E)$

② $s \circ s = \text{Id}_E$ donc $s \in \text{GL}(E)$ et $s^{-1} = s$

③ E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par s et $E_2 = \{x \in E, s(x) = -x\}$

④ $E_1 = \{x \in E, s(x) = x\} = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \{x \in E, s(x) = -x\} = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$

Def: On appelle involution toute application f de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = \text{Id}_E$

Proposition 18.11: Si f est une involution de E alors $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ et f est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$, parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

3. Application linéaire en dimension finie

Dans ce paragraphe, E est de dimension finie.

3.1 Image d'une base de E , caractérisation des espaces isomorphes.

Proposition 18.12 : Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

① f est surjective ssi l'image de $\mathcal{B}$ par f est génératrice de F

② f est injective ssi l'image de $\mathcal{B}$ par f est une famille libre dans F

③ f est bijective ssi $f(\mathcal{B}) = (f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F

Proposition 18.13: Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -EV avec E de dimension finie $n \geq 1$

① E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

② Si E et F sont isomorphes et si $\dim E = n$ alors F est de dimension finie et $\dim F = n$

③ Si F est aussi de dimension finie, E et F sont isomorphes ssi $\dim E = \dim F$

Dans la pratique : Pour montrer que E est de dimension finie, lorsqu'il est difficile d'en déterminer une base, on montre qu'il est isomorphe à un espace vectoriel de dimension finie de référence.

3.2 Détermination d'une application linéaire en dimension finie :

Théorème 18.1: Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -EV, E de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\mathcal{F} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de F .

Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) = u_i$

Dans la pratique: Si E admet une base $\mathcal{B}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par la donnée des images de la base $\mathcal{B}$. Soit f et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, et $\mathcal{B}$ une base de E , si f et g coïncident sur la base $\mathcal{B}$ alors $f = g$.

Corollaire : Soit E_1 et E_2 deux SEV supplémentaires de E , $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.

Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$\forall x \in E_1, f(x) = f_1(x)$ et $\forall x \in E_2, f(x) = f_2(x)$

3.3. Rang d'une application linéaire :

Soit E de dimension finie $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a vu que : $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p))$ et donc $\text{Im } f$ est de dimension finie.

Def: Soit E et F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\text{Im } f$ est un sev de F de dimension finie et on appelle rang de f la dimension de $\text{Im } f$, on note $\text{rg}(f)$.

Remarques:

- ★ Si F est aussi de dimension finie alors $\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$.
- ★ $\text{rg}(f) = 0 \Leftrightarrow f$ est l'application nulle.

Lemme du rang ou version géométrique du théorème du rang: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note H un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E .

L'application induite $\varphi: \begin{cases} H \rightarrow \text{Im } f \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Retenons: Tout supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E est isomorphe à $\text{Im } f$.

Théorème (ou formule) du rang: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.

$$\dim \text{Ker } f + \text{rg}(f) = \dim E.$$

⚠ Attention: En général, $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ ne sont pas supplémentaires !

Ce ne sont même pas, a priori, des sous-espaces du même espace vectoriel : $\text{Ker } f \subset E$ et $\text{Im } f \subset F$

Corollaire 1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie

- ① f est injective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E$
- ② f est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim F$
- ③ f est un isomorphisme $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = \dim E = \dim F$

Corollaire 2: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimension finie et de même dimension n .

- ① f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective
- ② f bijective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{rg}(f) = n$

Corollaire 3: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- ① Si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ g = \text{Id}_E$ alors $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = g$
- ② Si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ alors $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = g$

Dans la pratique: Si f est un endomorphisme de E avec $\dim E = n$, pour montrer que f est un automorphisme il suffit de montrer que $\text{Ker } f = \{0_E\}$ ou que $\text{rg}(f) = n$, encore que f est inversible à droite ou à gauche.

Proposition 18.14: rang d'une composée:

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -EV avec E et F de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a:

- ① $\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$
- ② Si g est un isomorphisme alors $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

3.4 Hyperplans

Def : On appelle hyperplan le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exemples: $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(1) = 0\}$

Proposition 18.16 : Soit E un espace de dimension finie $n \geq 1$ et H un SEV de E

① Pour tout vecteur $u \in E$, si $u \notin H$ alors, $E = H \oplus \text{Vect}(u)$

② H est un hyperplan de E ssi $\dim H = n - 1$

Proposition 18.18 : Soit E un espace de dimension finie $n \geq 1$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

Pour tout hyperplan H de E il existe $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus (0, 0, \dots, 0)$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \quad (*)$$

Vocabulaire : la relation $(*)$ est appelée équation de H .

Exemple : Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans de $\mathbb{R}^3$.

Leur équations dans la base canonique sont de la forme $ax + by + cz = 0$

4. Equation linéaire

Def : Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -E.V., une équation linéaire est une équation d'inconnue $x \in E$ qui s'écrit $f(x) = b$ avec $f : E \rightarrow F$ linéaire et $b \in F$.

Exemples : EDL, système de n équations à p inconnues, suites récurrentes linéaires

Proposition 18.18: Soit $f(x) = b$ une équation linéaire et S son ensemble de solutions dans E

① Si $b = 0_F$ l'équation est homogène et $S = \text{Ker } f$ est un SEV de E .

② $b \neq 0_F$ l'équation est avec second membre.

• Si $b \notin \text{Im } f$ alors l'équation n'admet pas de solution: $S = \emptyset$.

• Si $b \in \text{Im } f$, alors $S = \{ a + h, h \in \text{Ker } f \}$ avec a une solution particulière de l'équation.

★ Dans la pratique : On retrouve les structures des solutions des EDL et des systèmes linéaires.