Programme de colles-semaine 25- 29/04 au 03/05

Analyse asymptotique

- Domination et négligeabilité en a, caractérisation par le quotient, propriétés, compatibilité avec les opérations, comparaison des fonctions usuelles.
- Fonctions équivalentes en a, caractérisation par le quotient, propriétés, équivalents usuels, règles de calcul : produit, exponentiation, quotient, substitution, exemples de recherche d'un équivalent simple pour une somme.
- Propriétés conservées par équivalents : recherche de limite en a et signe au voisinage de a.

- Définition de f admet un DL d'ordre n en a, exemple fondamental : $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+..+x^n+o\ (x^n)$,

unicité, troncature, substitution, parité, $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et $DL_{2n}(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.

On se ramène systématiquement à un $DL_n(0)$ en posant x = a +h.

- Soit f définie au voisinage de a, f est continue en a ou prolongeable par continuité en a ssi f admet un $DL_0(a)$ et f (ou f prolongée) est dérivable en a ssi f admet un $DL_1(a)$.
- Formule de Taylor-Young (admis ici), DL à tout ordre en 0 de exp, cos, sin et $(1+x)^{\alpha}$, cas particulier usuels :

$DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ en 0.

- ·Combinaison linaire et produit de DL, DL en 0 de ch et sh.
- Composition de $DL_n(0)$, DL de l'inverse d'une fonction admettant un $DL_n(0)$ avec $a_0 \neq 0$, $DL_5(0)$ de tan.
- Intégration, $DL_n(0)$ de ln(1 + x) et arctan(x).
- Utilisation des DL pour la recherche d'un équivalent simple, pour le calcul d'une limite, pour une étude locale, pour une étude de branches infinies.

II. Applications linéaires

- Applications linéaires: définition et exemples, règle de calcul.
- L'image d'un SEV par une application linéaire est un SEV, f(E) est un sev de F noté Imf.

f surjective ssi Imf = F. Si E = Vet(e_1, e_2, …, e_n) alors Im f = Vect(f(e_1), f(e_2), …, f(e_n))

- L'image réciproque d'un SEV par une application linéaire est un SEV Noyau d'une application linéaire, Kerf est un SEV de E, f est injective ssi Kerf = {0E}.
- Opérations sur les applications linéaires : L'ensemble des applications, noté L(E,F) est un K-EV.

Composition d'application linéaire. Kerf $\subset$ Ker g$\circ$f, Im g $\subset$ Im g$\circ$f et [g$\circ$f = 0 $\Leftrightarrow$ Im f $\subset$ Ker g].f

---

Déroulement de la colle:

① Calcul d'un $DL_n(0)$ avec $n \leq 4$ faisant intervenir les DL usuels
En cas de difficultés, le colleur peut demander l'un des DL au verso.

② Une question de cours parmi les suivantes

- Enoncer la formule de Taylor-Young avec toutes ses hypothèses et l'appliquer pour obtenir le $DL_{2n+1}(0)$ de cos(x).
- Soit f :E $\to$ F linéaire, montrer que l'image directe d'un SEV de E est un SEV de F.
- Définition de Ker f et Im f et montrer que g$\circ$f = 0 $\Leftrightarrow$ Im f $\subset$ Ker g
- Montrer que Ker f = {0_E} ssi f est injective.

③ Exercice(s) au choix du colleur : Application des DL et/ou exercice d'application directe du cours sur les applications linéaires.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10
Prévisions : Applications linéaires.

♥ DL usuels à connaître

$$\frac{1}{1-x}\underset{0}{=}1+x+x^2+..+x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}\underset{0}{=}1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2}\underset{0}{=}1-x^2+x^4+...+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

$$e^x\underset{0}{=}1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$ch(x)\underset{0}{=}1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$sh(x)\underset{0}{=}x+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x)\underset{0}{=}1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x)\underset{0}{=}x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x)\underset{0}{=}x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$$

$$(1+x)^\alpha\underset{0}{=}1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\text{ avec }\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\sqrt{1+x}\underset{x\to 0}{=}1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\underset{x\to 0}{=}1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3)$$

$$\ln(1+x)\underset{0}{=}x-\frac{x^2}{2}+...+(1-)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x)\underset{0}{=}-x-\frac{x^2}{2}-...-\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

$$\arctan(x)\underset{0}{=}x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$$