TD-Chapitre 17: Développement asymptotique

Problème 1 : Comportement asymptotique d'une fonction:

On considère la fonction : $g : \mapsto x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

1. Donner l'ensemble de définition de g et étudier les limites de g aux bornes de cet ensemble.

2.a. Donner les intervalles où f est dérivable et montrer qu'il existe une fonction φ, de même ensemble de définition que g telle que $g'(x) = x\varphi(x)$.

2.b Etudier les variation de φ et end déduire le signe de φ.
2.c. Donner les variations de g.

On souhaite obtenir une représentation graphique de g.

3.a. On posant $h = \dfrac{1}{x}$, donner un développement asymptotique de g au voisinage de l'infini.

3.b. Préciser la nature des branches infinies de la courbe représentative de en $+\infty$ et en $-\infty$.

4.a. On note u la restriction de g à $]-1, +\infty[$.
Montrer que u admet un $DL_1(-1)$. Que peut-on en déduire ?
4.b. Même question pour v la restriction de g à $]-\infty, -1[$.

5. Donner l'allure précise de la courbe représentative de g

Problème 2 : ***Un suite implicite classique***

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $\left]\pi n - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur I_n notée x_n.
On représentera graphiquement la situation et on précisera la valeur de x_0.

2. Donner la limite et un équivalent simple de la suite (x_n).

3. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = x_n - n\pi$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \arctan(x_n)$ et en déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} + o(1)$

4. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2n^2\pi} + o(\dfrac{1}{n^2})$

Corrigé

Problème 1:

1. g est définie sur]-∞, -1[et]-1, ∞[.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \dfrac{1}{1+x} = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \dfrac{1}{1+x} = -\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ et par produit, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ $\boxed{g}$ $\boxed{\text{n'admet pas de limite en -1.}}$

En ±∞, $\dfrac{1}{1+x} \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} \to 0$ et $\arctan(h) \underset{0}{\sim} h$ donc par composition puis produit d'équivalents, $g(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x$.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

2. D'après les théorèmes généraux, g est dérivable sur]-∞, -1[et]-1, +∞[.

On trouve après calcul $g'(x) = x\left(2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) - \dfrac{x}{1+(1+x)^2}\right)$.

On pose donc $\varphi(x) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right) - \dfrac{x}{1+(1+x)^2}$

φ est clairement dérivable sur]-∞, -1[et]-1, +∞[.

Après calcul, $\varphi'(x) = -\dfrac{x^2+4x+6}{(x^2+2x+2)^2} < 0$.

φ est donc décroissante sur]-∞, -1[et sa limite à gauche en -1 est $-\pi + 1$ donc $\varphi(x) < 0$.
φ est donc décroissante sur]-1, +∞[et sa limite en +∞ est 0 donc $\varphi(x) > 0$.

On obtient le tableau de variations de g

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	$-\dfrac{\pi}{2}$ ‖ $\dfrac{\pi}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

3. On cherche un développement asymptotique de $g(x)$ à la précision $\frac{1}{x}$ à l'infini

On pose $h = \frac{1}{x}$.

$$g(x) = g(\frac{1}{h}) = \frac{1}{h^2}\arctan\left(\frac{1}{1+\frac{1}{h}}\right) = \frac{1}{h^2}\arctan\left(\frac{h}{h+1}\right).$$

On cherche un DL d'ordre 1 en 0 de $g(\frac{1}{h})$ donc on va écrire un $DL_3(0)$ $\arctan\left(\frac{h}{h+1}\right)$.

On a $\frac{h}{h+1} \underset{0}{=} h\left(1-h+h^2+o(h^2)\right) = h-h^2+h^3+o(h^3)$ et $\arctan(u) \underset{0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$

donc par composition des DL,

$$\boxed{\arctan\left(\frac{h}{1+h}\right) \underset{0}{=} \left(h-h^2+h^3\right) - \frac{1}{3}\left(h-h^2+h^3\right)^3 + o(h^3) \underset{0}{=} h-h^2+\frac{2}{3}h^3+o(h^3)}$$

On remplace : $g(\frac{1}{h}) \underset{0}{=} \frac{1}{h^2}\left(h-h^2+\frac{2}{3}h^3+o(h^3)\right) \underset{0}{=} \frac{1}{h} - 1 + \frac{2}{3}h + o(h)$

et enfin $\boxed{g(x) \underset{\pm\infty}{=} x - 1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})}$

On en déduit que la courbe de g admet une <u>asymptote oblique d'équation y = x – 1</u> en +∞ et en -∞.

4.a. On pose x = -1 + h, on a h = x + 1 > 0

$$u(x) = u(-1+h) = (-1+h)^2\arctan(\frac{1}{h}) = (-1+h)^2(\frac{\pi}{2} - \arctan h).$$

Or $\arctan(h) \underset{0}{=} h + o(h)$ et $(1+h)^2 \underset{0}{=} 1 - 2h + o(h)$ donc

$$u(1+h) \underset{0}{=} \left(1-2h+o(h)\right)\left(\frac{\pi}{2} - h + o(h)\right) \underset{0}{=} \left(\frac{\pi}{2} - (\pi+1)h + o(h)\right).$$

Et enfin, $\boxed{u(x) \underset{-1}{=} \left(\frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1) + o((x+1))\right)}$.

On en déduit que u est prolongeable par continuité en -1, en posant u(-1) = $\frac{\pi}{2}$ et que ce prolongement est dérivable en -1 avec u'(-1) = - π - 1.
La courbe de u admet une demi-tangente au point d'abscisse -1 de pente -π - 1

4.b. On pose x = -1 + h, on a h = x + 1 < 0

$$v(x) = v(-1+h) = (-1+h)^2\arctan(\frac{1}{h}) = (-1+h)^2(-\frac{\pi}{2} - \arctan h).$$

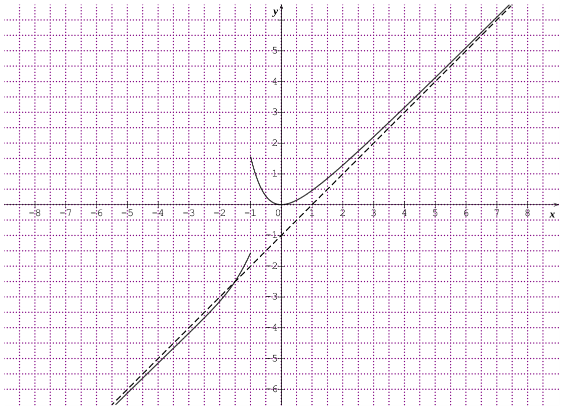
Or $\arctan(h) \underset{0}{=} h + o(h)$ et $(1+h)^2 \underset{0}{=} 1 - 2h + o(h)$ donc

$$v(1+h) \underset{0}{=} \left(1-2h+o(h)\right)\left(-\frac{\pi}{2} - h + o(h)\right) \underset{0}{=} \left(-\frac{\pi}{2} + (\pi-1)h + o(h)\right).$$

Et enfin, $\boxed{v(x) \underset{-1}{=} \left(-\frac{\pi}{2} + (\pi-1)(x+1) + o((x+1))\right)}$.

On en déduit que v est prolongeable par continuité en -1, en posant v(-1) = -$\frac{\pi}{2}$ et que ce prolongement est dérivable en -1 avec v'(-1) = π - 1.
La courbe de v admet une demi-tangente au point d'abscisse -1 de pente -π - 1

5. On trace la courbe
$y = x - 1$ est asymptote oblique en $\pm\infty$



Il y a une tangente horizontale à l'origine.
la fonction n'est pas définie en -1, et n'est pas prolongeable par continuité mais les courbes ses restrictions admettent des demi-tangentes de pente π - 1 et -π - 1