Programme de colles-semaine 27- 13/05 au 17/05

Applications linéaires

• Applications linéaires: définition et exemples, règle de calcul, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, la composée de deux applications linéaire est linéaire.
• Image d'un SEV par une application linéaire est un SEV, f(E) est un sev de F noté Imf.
f surjective ssi Imf = F
• Noyau d'une application linéaire, Kerf est un SEV de E, f est injective ssi Kerf = $\{0_E\}$
• Endomorphismes, isomorphismes, automorphisme, définition et exemples.
Composée d'endomorphismes, notation f^n pour f itérée n fois.
Formule du binôme et de Bernoulli pour des endomorphismes qui commutent.
• Cas particuliers d'endomorphismes de E: homothéties, projections et symétrie
★ Projecteurs: $f \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur lorsque $f \circ f = f$.
Si p est un projecteur de E alors E = Kerp $\oplus$ Imp et p est le projection sur Imp parallèlement à Kerp.
★Symétrie: $f \in \mathcal{L}(E)$ est une involution lorsque fof=I_d.
Si f est une involution de E alors E = Ker(f-Id)$\oplus$Ker(f+Id) et f est la symétrie par rapport à Ker(f-Id) parallèlement à Ker(f+Id).

• Image d'une base et caractérisations : f est surjective ssi l'image de $\mathcal{B}$ par f est génératrice de F, f est injective ssi l'image de $\mathcal{B}$ par f est une famille libre dans F, f est bijective ssi l'image de $\mathcal{B}$ par f est une base de F. Toute application linéaire u de E dans F est entièrement déterminée par l'image de B
• Espaces vectoriels isomorphes : cas de la dimension finie : dim E = n ssi E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, si E est de dimension finie n et si E et F sont isomorphes alors Fest de dim finie n.
• Rang d'une application linéaire, lemme du rang et théorème du rang. Conséquence : application injective, surjective et bijective en dimension finie. Rang d'une composée
• Hyperplan en dimension finie définie comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.
H est un hyperplan ssi dim H = n – 1
• Equations linéaires.

II. Représentations matricielles

• Matrice représentative d'un vecteur de E, d'une famille de vecteurs, isomorphisme entre les familles de cardinal p dans un espace de dimension n et les matrices $n\times p$ une fois une base fixée.
• Famille échelonnée de $\mathbb{R}^n$.
• Matrice représentative d'une application linéaire, isomorphisme entre L(E,F) avec dim E = p et dim F = n et les matrices $n\times p$, une fois les bases fixées.

Déroulement de la colle:

① Ecrire la matrice d'une application linéaire.

② Une question de cours parmi les suivantes

- Montrer que Ker f = $\{0_E\}$ ssi f est injective.
- Montrer que $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$
- Si p est un projecteur de E alors E = Kerp $\oplus$ Imp et p est le projection sur Imp parallèlement à Kerp.
- Enoncé et preuve du lemme du rang : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et H un supplémentaire de Ker f dans E. L'application $\varphi : \begin{cases} H \to \text{Im} f \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{cases}$ est un isomorphisme.

③ Exercices d'algèbre linéaire