

## Programme de colles-semaine 28- 20/05 au 25/05

---

### I. Applications linéaire en dimension finie :

- Rang d'une application linéaire, lemme du rang et théorème du rang. Conséquence : application injective, surjective et bijective en dimension finie. Rang d'une composée
- Hyperplan en dimension finie définie comme le noyau d'une forme linéaire non nulle.  
H est un hyperplan ssi  $\dim H = n - 1$
- Equations linéaires.

### II. Représentations matricielles

- Matrice représentative d'un vecteur de E, d'une famille de vecteurs, isomorphisme entre les familles de cardinal p dans un espace de dimension n et les matrices  $n \times p$  une fois une base fixée.
  - Famille échelonnée de  $\mathbb{R}^n$ .
  - Matrice représentative d'une application linéaire, isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E,F)$  avec  $\dim E = p$  et  $\dim F = n$  et les matrices  $n \times p$ , une fois les bases fixées.
  - Utilisation du produit matriciel pour le calcul de l'image d'un vecteur par une application linéaire, pour le calcul de la matrice d'une composée de deux applications linéaires, matrice d'un isomorphisme.
  - Application linéaire f canoniquement associée à une matrice, noyau, image et rang d'une matrice défini comme le noyau, l'image et le rang de f. Propriétés immédiates :  $\text{rg}(A) \leq \min(n,p)$ ,  $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$ , invariance du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible
  - Théorème du rang pour les matrices. Les OEC préservent  $\text{Im } A$  et les OEL préservent  $\text{Ker } A$  donc les OEL/OEC conservent le rang de A, calcul pratique du rang.
  - Caractérisation des matrices inversibles :  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$
  - Admis :  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$
  - Matrice de passage d'une base B à une base B', définition et propriété.
  - Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes.
  - Matrice semblable : définition, deux matrices semblables ont le même rang, Si A et B sont semblables, leurs puissances le sont aussi.
  - Matrice d'un système linéaire, cohérence entre les différentes notions de rang.
- 

### Déroulement de la colle:

#### ① Une question de cours parmi les suivantes

- Enoncé et preuve du lemme du rang : Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et H un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans E. L'application  $\varphi : \begin{cases} H \rightarrow \text{Im } f \\ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \end{cases}$  est un isomorphisme.
- Calcul du rang d'une matrice sur un exemple en dimension 3 ou 4 avec ou sans paramètre.
- Enoncer et justifier la formule de changement de base pour un endomorphisme.

#### ② Exercice d'algèbre linéaire (Il ne manque que les déterminants)

---

**Prévisions** : Dénombrements et probabilités