Exercices - Chapitre 20: ensembles finis, dénombrement.
♥ Exercice à savoir refaire.

Ensembles finis

♥ 20.1 Soit E = ⟦1, 10⟧ et F = ⟦1, 20⟧.
a. Quel est le nombre d'applications de E dans F ?
b. Quel est le nombre d'injections de E dans F ?
c. Quel est le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F ?

20.2 Applications surjectives.
Pour $(n, p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on désigne par S(p, n) le nombre de surjections de ⟦ 1, p ⟧ sur ⟦ 1, n ⟧.
1. Pour $n > p \geq 1$, déterminer S(p, n).
2. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, déterminer S(p, p), S(p, 1) et S(p, 2).

3. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, déterminer S(p + 1, p).

20.3 Soit E un ensemble fini de cardinal n.
a. Dénombrer les couples (A,B) de $\mathcal{P}(E)$ tels que $A\subset B$.
b. Dénombrer les couples (A,B) de $\mathcal{P}(E)$ tels que $A\not\subset B$ et $B\not\subset A$.

Preuves combinatoires

♥ 20.4 Dans un jeu de 32 cartes, on considère une main de 16 cartes. Combien y-a-t-il de mains contenant exactement 3 rouges ? Exactement k rouges avec $0 \leq k \leq 16$.

S'inspirer de ce calcul pour démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

♥ 20.5 ***Formule de Vandermonde.***
Soit k, n et m trois entiers naturels tels que $k \leq n + m$. On considère A et B deux ensembles disjoints de cardinal respectif n et m, en dénombrant les parties de $E = A\cup B$ de cardinal k de deux manières différentes, établir que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$

Dénombrer dans la pratique

♥ 20.6 ***p-listes, p-arrangements ou p-combinaison ?***

1. Quel est le nombre de codes possibles pour une carte bleue ?
2. Au loto, on tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
3. Au tiercé, une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
4. Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ? (avec au plus un manteau par patère).
5. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire simultanément 3. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
6. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire successivement 3 sans remise. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
7. Combien pièces contient un jeu de dominos?
8.a. Quel est le nombre de façon de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI2?
8.b. Quel est le nombre de façon de choisir 2 délégués dans la classe de PCSI2 si l'on impose un garçon et une fille ?
9. Quel est le nombre de plaques minéralogiques possibles ?
Une plaque minéralogique est composée de « 2 lettres – 3 chiffres – 2 lettres »
10. Quel est le nombre de plaques minéralogiques possibles dont tous les chiffres et les lettre sont deux à deux distincts ?

11. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
12. Un QCM, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions qui ont chacune 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

♥ **20.7** Soit E l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne comportant aucun « 0 ».
1. Déterminer le cardinal de l'ensemble E.
2. Soit E_1 l'ensemble des nombres de E ayant six chiffres différents. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_1.
3. Soit E_2 l'ensemble des nombres pairs de E. Déterminer le cardinal de l'ensemble E_2.
4. Soit E_3 l'ensemble des nombres de E dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits). Déterminer le cardinal de l'ensemble E_3.

♥ **20.8** Combien y a –t-il de d'entiers qui s'écrivent exactement avec n chiffres significatifs avec $n \geq 3$, et dont exactement deux chiffres 8 ?

♥ **20.9** ***Le pouilleux*** : on rappelle qu'un jeu de 52 cartes contient 13 cartes de 4 couleurs différentes : pique, cœur, carreaux et trèfle, ainsi que 3 figures : roi, dame et valet à chaque couleur. On appelle main une partie extraite du jeu.
a. Déterminer le nombre de mains de 8 cartes.
b. Combien de ces mains contiennent le valet de pique ?
c. Combien de ces mains contiennent au moins un valet ?
d. Combien de ces mains contiennent au moins un valet et un pique?
e. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques dont le valet.
f. Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques et deux valets ?

20.10 Une urne contient des boules de deux couleurs : blanches et noires.
On tire successivement 5 fois une boule, en remettant la boule tirée après chaque tirage et on note les couleurs obtenues.
a. Combien a-t-on de résultats différents ?
b. Combien de résultats avec au moins deux boules de couleurs différentes ?
c. Combien de résultats avec deux boules blanches et 3 noires ?
d. Combien de résultats avec au plus deux boules noires ?
e. Combien de résultats avec une boule blanche en dernier ?

20.11 Dans une classe de 30 élèves, 12 étudient l'anglais, 15 étudient l'allemand, 18 étudient l'espagnol, 6 étudient l'anglais et l'allemand, 7 l'allemand et l'espagnol, 8 l'espagnol et l'anglais. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

20.12 ***Nombre de solutions de $x_1+x_2+...x_p = n$***
a. Déterminer le nombre de solution de l'équation $x + y = n$ dans $\mathbb{N}^2$.
b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x + y + z = n$ dans $\mathbb{N}^3$.
c. On décide du codage suivant : le mot binaire 00100010 code l'égalité 2+3+1 = 6 donnant une solution de $x + y + z = 6$ dans $\mathbb{N}^3$.
Retrouver le résultat de la question b. en utilisant cette représentation des solutions.
d. Déterminer le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + ...x_p = n$ dans $\mathbb{N}^p$
e. Déterminer le nombre de solutions de $x_1 + x_2 + ...x_p = n$ dans $(\mathbb{N}^*)^p$

Une application Soit $E = [\![1, p]\!]$ et $F = [\![1, n]\!]$. On veut déterminer le nombre d'applications croissante de E dans F. On pose x_k le nombre d'antécédents de $k \in [\![1, n]\!]$ par f.
Quelle égalité vérifie les entiers $(x_k)_{1k})_{1 \leq k \leq n}$? Conclure.