Programme de colles-semaine 29- 27/05 au 31/05

I. Représentations matricielles

- Application linéaire f canoniquement associée à une matrice, noyau, image et rang d'une matrice défini comme le noyau, l'image et le rang de f. Propriétés immédiates : $rg(A) \leq \min(n,p)$, $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$, invariance du rang par multiplication à droite ou à gauche par une matrice inversible
- Théorème du rang pour les matrices. Les OEC préservent Im A et les OEL préservent Ker A donc les OEL/OEC conservent le rang de A, calcul pratique du rang.
- Caractérisation des matrices inversibles : $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow rg(A) = n$
- Admis : $rg(A) = rg(A^T)$
- Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$, définition et propriété. Formule de changement de base pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes.
- Matrice semblable : définition, deux matrices semblables ont le même rang, Si A et B sont semblables, leurs puissances le sont aussi.
- Matrice d'un système linéaire, cohérence entre les différentes notions de rang.

I. Dénombrement

- Ensembles finis : définition d'un ensemble fini et de son cardinal, soit E un ensemble fini et F une ensemble, E et F sont en bijection ssi F est fini et card(F) = card(E).
- Cardinal d'une partie. Si A et B sont deux parties disjointes de E alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$, généralisation à une famille de parties disjointes, partition de E, formule de Poincaré. (formule du crible HP vue pour la réunion de 3 parties). Preuve de $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ par récurrence.
- Cardinal du produit cartésien de p ensembles finis
- Soit E fini, si il existe une injection de E dans F alors $card(E) = card(f(E)) \leq card(F)$, principe de Dirichlet.
  si il existe une surjection de E sur F alors $card(E) \geq card(F)$,
- Si E et F sont finis de même cardinal alors f bijective $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective
- Notion de p-listes, si E est de cardinal n, le nombre de p-listes de E est n^p.

Le nombre d'application de E de cardinal p dans F de cardinal n est n^p

- Notion de p-arrangements, si E est de cardinal n, le nombre de p-arrangements de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Le nombre d'injections de E de cardinal p dans F de cardinal n

- Notion de permutation, si E est de cardinal n, le nombre de permutations de E est n !

Le nombre de bijection de E sur F de cardinal commun n est n !

- Notion de p-combinaison, le nombre de p-combinaison de E est $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Preuves combinatoires des propriétés des entiers $\dbinom{n}{p}$; Preuve de $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ en utilisant une partition.

- Exemples de calcul de nombre d'anagrammes

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes

- Calcul du rang d'une matrice sur un exemple en dimension 3 ou 4 avec ou sans paramètre.
- Enoncer et justifier la formule de changement de base pour un endomorphisme.
- Preuve de $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ par récurrence.

② Un exercice simple de dénombrement utilisant des listes, des arrangements, des permutations, des combinaisons ou des anagrammes.

③ Exercice d'algèbre linéaire basé sur les changements de base, les matrices semblables.
(*Il ne manque que les déterminants*).