Programme de colles-semaine 30- 03/06 au 07/06

I. Dénombrement **cf pg 29**

II. Probabilité sur un univers fini

- Expérience aléatoire, univers probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ associé (cette année Ω est fini), vocabulaire, événements et notation ensemblistes des événements A et B, A ou B, A mais pas B, le contraire de A, événements disjoints. Système complet d'événements, exemples.
- Une probabilité sur Ω est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0,1] vérifiant : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont disjoints, $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Propriétés de calcul : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1- \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B)$,

$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

- Soit $(p_1,..p_n)$ une famille de n réels positifs de somme 1, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_n\}$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ et $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$
- Définition de la probabilité uniforme sur Ω et mode de calcul de $\mathbb{P}(A)$ dans ce cas particulier.
- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B\in\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}_B : A \mapsto \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité sachant B.
- formule des probabilités composées, formules des probabilités totales, formules de Bayes.
- Indépendance de deux événements, famille d'événements mutuellement indépendants.

III. Variables aléatoires

- Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini, une variable aléatoire sur Ω est une application de Ω dans un ensemble E. $X(\Omega)$ est l'ensemble fini des valeurs prises par X. On note $(X\in A)$ l'événement $X^{-1}(A)$ pour toute partie de A et plus particulièrement $(X = k)$ si $A = \{k\}$
- Loi d'une variable aléatoire, loi conditionnelle sachant A avec $P(A) > 0$, loi d'une composée $f(X)$
- Lois usuelles : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
- Famille de variables aléatoires, loi conjointe du couple (X, Y), lois marginales.
Extension à un n-uplet de variables aléatoires, loi de $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- Couple de variables aléatoires indépendantes, notation $X \perp\!\!\!\perp Y$, loi de la somme de deux binomiales indépendantes de paramètre (n, p) et (m, p). Extension à un n-uplet de variables aléatoires indépendantes, lemme des coalitions. Si $(X_1, X_2,\dots X_n)$ est un n-uplet de va de Bernoulli indépendantes de même paramètre p alors $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi $B(n, p)$.

Déroulement de la colle:

① Une question de cours parmi les suivantes :

- Enoncer la formule des probabilités composées avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Enoncer la formule des probabilités totales avec toutes ses hypothèses et proposer un exemple d'application.
- Montrer que si $(X_1, X_2,\dots, X_n)$ est un n-uplet de va de Bernoulli indépendantes de même paramètre p alors $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi $B(n, p)$.

② Donner la loi d'une VA dans un exemple simple.
Il est possible d'avoir besoin du dénombrement

③ Exercice(s) sur le thème des probabilités.