Exercices – Chapitre 22: Variables aléatoires
Tous les exercices sont corrigés en ligne

22.1 Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P(X = 1) = P(X=2)$ et
$P(X = k) = \dfrac{1}{k}$ pour $k \in \{3, 4, 5\}$.

a. Déterminer la loi de X puis calculer $P(X < 2)$, $P(X \geq 4)$ et $P(1{,}3 < X \leq 4.5)$

b. On pose $Y = 2X^2 + 3$, donner la loi de Y.

22.2 Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire successivement une boule dans cette urne sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule couleur. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de probabilité de X.

22.3 Une urne contient n boules blanches et p boules noires avec p avec $p \geq 3$. On tire successivement 3 boules de cette urne en remettant la boule tirée seulement si elle est blanche. On note X le nombre de boules dans l'urne à la fin du tirage. Déterminer la loi de X

22.4 Donner la loi suivie par X dans les cas suivants

a. On choisit un jeton au hasard dans un sac contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. On note X le numéro du jeton.

b. On note X le nombre de garçons dans une famille de 4 enfants.

c. On note X le nombre de voyelles dans un mot constitué de 8 lettres choisies au hasard dans l'alphabet (le mot n'a donc pas nécessairement de sens).

d. On forme un jury de 6 personnes choisies au hasard dans un groupe composé de 5 hommes et 4 femmes. On note X le nombre de femmes dans le jury.

e. Paige Fox a égaré sa fiche sur les lois usuelles dans son classeur d'anglais qui compte 500 feuilles. Elle décide de la chercher en vérifiant toutes les pages dans l'ordre. X est égal au rang d'apparition de sa précieuse fiche.

f. On range au hasard 9 clés dans 3 tiroirs. On note X le nombre de clés dans le premier tiroir.

g. Une urne contient 6 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues. On tire successivement et sans remise 10 boules de l'urne. On note X le nombre de boules vertes obtenues.

h. Seul 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles et on note X de nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

22.5 Soient $p \in \mathbb{R}$ et X, Y deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli telles que la loi conjointe du couple (X, Y) soit donnée par :

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6} + p$	$\frac{1}{3} - p$
1	$\frac{1}{2} - p$	p

a. Que doit vérifier p pour que ce tableau représente effectivement une loi conjointe ?

b. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

c.. Pour quelle(s) valeur(s) de p les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

22.6 On dispose d'un dé à six faces, non truqué et d'une pièce bien équilibrée.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Le dé est lancé N fois et la pièce autant de fois que le nombre de « 6 » obtenus lors des N lancers du dé.
Soient X le nombre de « 6 » obtenus lors des N lancers et Y le nombre de « Pile » obtenus.

a. Préciser la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

b. Déterminer la loi conjointe de X et Y, puis la loi de Y.

c. X et Y sont-elles indépendantes ?

22.7 Soit n un entier naturel non nul. On choisit au hasard, un nombre entier X dans $[\![1, n]\!]$, puis, au hasard, un nombre entier Y dans $[\![1, X]\!]$.
a. Déterminer la loi du couple (X, Y).
b. Déterminer la loi de Y.
c. Calculer l'espérance de Y

22.8 On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $m = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
a. Déterminer la loi probabilité de l'événement $P(m \geq k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
b. En déduire la loi de m
c. Montrer que $P(\exists i \in [\![1, n]\!], X_i = 1) \geq 1 - 1/e$

22.9 On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $M = \max(X, Y)$.
a. Déterminer la loi du couple (M, X) puis en donner les lois marginales.
b. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer $P(X \leq k)$ et retrouver la loi de M.
c. Calculer E(M).

22.10 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ et u_n la probabilité que S_n soit pair.
a. Préciser la loi de S_n.
b. Calculer u_1, u_2 et u_3.
c. Ecrire une relation de récurrence vérifiée par (u_n) et expliciter u_n. Quelle est sa limite ?

22.11 Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Les résultats de X sont affichés sur un compteur détraqué :
• Lorsque X ne prend pas la valeur 0, le compteur affiche X.
• Lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et n.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y égale au résultat affiché par le compteur.

22.12 Calvin jette n boulettes de papier sur Susie avec une probabilité $p \in]0,1[$ de l'atteindre. Chaque lancer est indépendants des précédents. On note X le numéro de la première boulette qui fait mouche (avec X = 0 si Susie évite toutes les boulettes).
a. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
b. Calvin a atteint Susie. Quelle est la probabilité que cela se soit produit dès le 1^{er} jet ?

22.14 ***Marche aléatoire***
On se déplace sur un axe gradué et orienté. A l'instant n = 0, on part de l'origine 0, et à chaque instant on se déplace vers la droite (+1) avec la probabilité p et vers la gauche (-1) avec la probabilité 1 – p. On note X_n l'abscisse de la position occupée à l'instant n, on a donc $X_0 = 0$.
On note D_n la variable aléatoire comptant le nombre de déplacements vers la droite en n déplacement.
a. Donner la loi de D_n.
b. Calculer l'espérance puis la variance de X_n.
c. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles X_n est centrée ? Interpréter.
d. Ecrire une fonction Python de paramètre p et n qui simule X_n, puis un script permettant d'estimer $E(X_n)$ pour p = 1/3. *On utilisera des fonctions du module random*

22.15 Soit n et k deux entiers vérifiant $1 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une poignée de k boules au hasard. On appelle X le plus grand des numéros figurant sur les k boules tirées.
1. Quelles valeurs X peut-elle prendre ? Déterminer la loi de X.
2. Qu'obtient-on dans les cas limites k = 1 et k = n ?
3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ et en déduire E(X).

22.16 *Urne de Polya*
Une urne contient initialement a boules rouges et b boules bleues avec a et b non nuls.
On effectue des tirages successifs au cours desquels on remet la boule tirée et on ajoute dans l'urne une boule de même couleur. Ainsi, après chaque tirage, l'urne compte une boule de plus.
On note, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si la k-ième boule tirée est rouge et égale à 0 sinon. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées au cours des n premiers tirages.
a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les lois conditionnelles de X_{n+1} sachant $(Y_n = k)$
b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Etablir une relation entre $E(X_{n+1})$ et $E(Y_n)$.
c. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que : $E(Y_{n+1}) = E(Y_n) + \frac{1}{n+a+b}E(Y_n) + \frac{a}{n+a+b}$
d. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $E(Y_n) = \frac{na}{a+b}$ et en déduire la probabilité de tirer une boule rouge dans l'urne au nième tirage.

22.17 Un sondeur souhaite déterminer la probabilité p qu'une personne d'un certain pays vote aux prochaines élections pour le candidat C. Pour ce faire, il interroge *n* personnes et compte le nombre X de personne déclarant voter pour C. On suppose que les déclarations de vote sont indépendantes.
a. Donner la loi de X et en déduire que $\forall\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$
b. Quelle valeur de *n* doit-il prendre pour avoir une probabilité de 98% que $\frac{X}{n}$ soit voisin de p à 1% près ?

22.18 Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini et A, B deux événements.
a. Justifier que la fonction indicatrice de A est une variable aléatoire sur Ω. Quelle est sa loi ?
b. Montrer successivement que $V(\mathbb{I}_A) \leq \frac{1}{4}$ et $|Cov(\mathbb{I}_A,\mathbb{I}_B)| \leq \frac{1}{4}$
c. En déduire que $\left|P(A\cap B) - P(A)P(B)\right| \leq \frac{1}{4}$

22.19 On considère n joueurs qui tirent à la carabine sur une cible. Chaque joueur dispose de 2 coups, et touche la cible avec une probabilité p. Les différents joueurs et les différents tirs sont supposés indépendants.
a. On note X_1 le nombre de tireurs qui touchent la cible au premier tir, et X_2 le nombre de tireurs qui touchent au second tir. Donner les lois de X_1, X_2, X_1+X_2.
b. On note A le nombre de tireurs touchant la cible lors de leurs deux essais et B le nombre de tireurs touchant la cible sur un seul des deux essais. Donner les lois de A et B.
c. Exprimer X_1+X_2 en fonction de A et B puis en déduire Cov(A, B). Interpréter le résultat.

22.20 *Inégalité de Cantelli*
Soit $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathcal{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle définie sur Ω et a un réel strictement positif.
a. Justifier que $\forall t \geq 0$, $P(X - E(X) \geq a) \leq P((X - E(X) + t)^2 \geq (a + t)^2)$.
b. En déduire successivement que $\forall t \geq 0$ $\mathcal{P}(X - E(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(t+a)^2}$

et $\mathcal{P}(X - E(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}$

c. Montrer que $\mathcal{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + a^2}$