Programme de colles-semaine 31- 10/06 au 14/06

I. Variables aléatoires

• Soit (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$) un espace probabilisable fini, une variable aléatoire sur Ω est une application de Ω dans un ensemble E. X(Ω) est l'ensemble fini des valeurs prises par X. On note ($X\in A$) l'événement $X^{-1}(A)$ pour toute partie de A et plus particulièrement (X = k) si A = {k}
• Loi d'une variable aléatoire, loi conditionnelle sachant A avec P(A) > 0, loi d'une composée f(X)
• Lois usuelles : loi certaine, loi uniforme, loi de Bernoulli, loi binomiale.
• Famille de variables aléatoires, loi conjointe du couple (X, Y), lois marginales.
Extension à un n-uplet de variables aléatoires, loi de $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
• Couple de variables aléatoires indépendantes, notation $X \perp\!\!\!\perp Y$, loi de la somme de deux binomiales indépendantes de paramètre (n, p) et (m, p). Extension à un n-uplet de variables aléatoires indépendantes, lemme des coalitions. Si $(X_1, X_2,\dots X_n)$ est un n-uplet de va de Bernoulli indépendantes de même paramètre p alors $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi B(n, p).
• Espérance d'une variable aléatoire, différentes écritures, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert.
• Variance et écart-type d'une variable aléatoire, formule de Koenig-Huygens, propriétés.
• Espérance et variance d'une loi usuelle.
• Covariance de deux variables aléatoires, variables corrélées et décorrélées, cas de deux va indépendantes.
• Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, application : loi faible des grands nombres

II. Déterminants

• Forme n-linéaire alternée sur un espace vectoriel E de dimension n. f est alternée ssi f est antisymétrique. Les formes n-linéaire alternée forment un SEV de dimension 1.
• Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on admet qu'il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E telle que f($\mathcal{B}$) = 1, f est le déterminant dans la base $\mathcal{B}$. Propriétés immédiates de calcul, caractérisation des bases.
• Calcul du déterminant en dimension 2 et 3, interprétation géométrique.
• Déterminant d'une matrice carrée : c'est le déterminant de la famille de ses colonnes dans la base canonique $\mathbb{K}^n$. Propriétés immédiates de calcul, caractérisation des matrices inversibles,
det(AB) = det(A)det(B) det(A) = det(A^T).
• Développement selon une ligne ou une colonne, déterminant d'une matrice triangulaire, diagonale.
• Effet des OEC et OEL sur le déterminant, calcul pratique des déterminants en dimension n.
• Invariance du déterminant par similitude, déterminant d'un endomorphisme et application.

Déroulement de la colle:

① Calcul d'un déterminant en dimension 3 ou 4 avec ou sans paramètre

② Une question de cours parmi les suivantes :

- Loi binomiale, espérance et variance, démonstration.
- Enoncer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. En démontrer une..
- Montrer que si $(X_1, X_2,\dots, X_n)$ est un n-uplet de va de Bernoulli indépendantes de même paramètre p alors $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi B(n, p).

③ Exercice(s) sur les variables aléatoires.