Chapitre 24: Intégration sur un segment - Démonstrations

① Preuve de la proposition 24.1 : définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

Il faut montrer que le résultat du calcul ne dépend pas de la subdivision σ choisie. Soit σ' une autre subdivision adaptée à f, deux cas sont à considérer:

1er cas: σ' est plus fine que σ alors σ' a été obtenue en rajoutant un nombre fini de points à σ. Montrons que le calcul est inchangé si on ajoute un point à σ.

Considérons la subdivision $\sigma' = (x_k)_{0\le k\le N} \cup \{a\}$ où $a\in I$. $\exists k\in[\![0;n-1]\!]$ tel que $a\in]x_k;x_{k+1}[$.
Réfléchir à l'aide de la figure.
$I_{\sigma'}(f) = (x_1-x_0)y_0 + (x_2-x_1)y_1 + ...(a-x_k)y_k + (x_{k+1}-a)y_k + ... + (a_n-a_{n-1})y_{n-1}$
= ....*à faire*
$= I_\sigma(f)$

Si c'est vrai en ajoutant un point à σ, c'est donc vrai en ajoutant un nombre fini de points à σ.

2ème cas: σ' n'est pas plus fine que σ alors $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et σ' donc, d'après ce qui précède: $I_\sigma(f) = I_{\sigma''}(f)$ et $I_{\sigma'}(f) = I_{\sigma''}(f)$ donc $I_\sigma(f) = I_{\sigma'}(f)$.

② Preuve du théorème 24.2 : définition de l'intégrale d'une fonction continue

• $f\in\mathcal{C}(I)$ donc f est bornée sur I. Soit m un minorant et M un majorant de f sur I. *Figure.*

La fonction constante égale à m est en escalier sur I et minore f donc $A^-(f)$ est non vide car il contient $\int_a^b m\,dt = m(b-a)$.

Soit $\varphi\in\mathbb{E}(I)$, $\varphi \le f$, comme $f \le M$, alors $\varphi \le M$ et par croissance de l'intégrale de deux fonctions en escalier: $\int_a^b \varphi \le \int_a^b M\,dt = M(b-a)$ donc $A^-(f)$ est majoré par M(b-a).
$A^-(f)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée donc elle admet une borne sup notée $\sup(A^-(f)) = \alpha$
De même $A^+(f)$ admet une borne inf notée $\inf(A^+(f)) = \beta$

• Comme on a $\varphi \le f \le \psi$ sur I alors $\int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi$ par croissance de l'intégrale d'une fonction en escalier et donc $\boxed{\alpha \le \beta \ (1)}$

• Soit $\varepsilon > 0$, comme $f\in\mathcal{C}(I)$, d'après le théorème d'approximation, il existe φ_0 et $\psi_0\in\mathbb{E}(I)$ telles que $\varphi_0\le f \le\psi_0$ sur I et $\psi_0 - \varphi_0 \le \varepsilon$ sur I.
On a $\int_a^b \varphi_0 \le \alpha$ et $\beta \le \int_a^b \psi_0$, donc $\beta-\alpha \le \int_a^b \psi_0 - \int_a^b \varphi_0$.
Or $\int_a^b \psi_0 - \int_a^b \varphi_0 = \int_a^b (\psi_0 - \varphi_0) \le \varepsilon(b-a)$ et enfin $\boxed{\beta - \alpha \le \varepsilon(b - a)\ (2)}$

• (1) et (2) donnent $0 \le \beta - \alpha \le \varepsilon(b - a)$ pour tout $\varepsilon > 0$
Supposons $\beta - \alpha > 0$ et posons $\gamma = \frac{\beta-\alpha}{2}$. On a $0 < \gamma < \beta - \alpha$

En prenant $\varepsilon = \frac{\gamma}{b-a}$ dans l'inégalité (2), on obtient $\beta - \alpha \le \gamma$ ce qui est absurde.

On conclut que $\beta - \alpha = 0$ ou encore $\alpha = \beta$ CQFD.

③ Preuve de la proposition 24.2 : Linéarité de l'intégrale d'une fonction continue

Montrons que $\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$, on ferait de même pour montrer que $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f=\alpha\int_a^b f$

Soit $\varepsilon > 0$
$f\in\mathcal{C}(I)$ donc il existe deux fonctions en escalier φ_1 et ψ_1 telles que $\varphi_1\le f\le\psi_1$ et $\psi_1-\varphi_1\le\varepsilon/2$
$g\in\mathcal{C}(I)$ donc il existe deux fonctions en escalier φ_2 et ψ_2 telles que $\varphi_2\le g\le\psi_2$ et $\psi_2-\varphi_2\le\varepsilon/2$
On en déduit successivement les résultats suivants :

• Par définition de l'intégrale de f et de g :

$\int \varphi_1 \le\int f\le\int\psi_1$ et $\int \varphi_2\le\int g\le\int\psi_2$ et en sommant $\int \varphi_1+\int\varphi_2\le\int f+\int g\le\int\psi_1+\int\psi_2$.

Or l'intégrale d'une fonction en escalier est linéaire donc : $\boxed{\int\varphi_1+\varphi_2\le\int f+\int g\le\int\psi_1+\psi_2}$

•• On a aussi $\varphi_1+\varphi_2\le f+g\le\psi_1+\psi_2$ avec $(f+g)\in\mathcal{C}(I)$ et $(\varphi_1+\varphi_2)$, $(\psi_1+\psi_2)\in\mathbb{E}(I)$
avec $(\psi_1+\psi_2)-(\varphi_1+\varphi_2)\le\varepsilon$
donc $\boxed{\int\varphi_1+\varphi_2\le\int f+g\le\int\psi_1+\psi_2}$ par définition de l'intégrale.

••• On a enfin $(\psi_1+\psi_2)-(\varphi_1+\varphi_2)\le\varepsilon$ donc $\boxed{\int\psi_1+\psi_2-\int\varphi_1+\varphi_2\ \le\ \varepsilon(b-a)}$ par croissance de l'intégrale d'une fonction en escalier.

<u>En conclusion</u>: l'écart entre $\int f+g$ et $\int f+\int g$ est majoré par $\int\psi_1+\psi_2-\int\varphi_1+\varphi_2\ \le\ \varepsilon(b-a)$, et ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$ donc cet écart est nul par le même raisonnement que dans la preuve précédente.

$$\boxed{\int f+g\ -\left(\int f+\int g\right)=0\Leftrightarrow\int f+g=\int f+\int g}$$

---

④ Preuve du théorème 24.4 : Convergence des sommes de Riemann.

On se limite à le démontrer pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a,b].
f est dérivable sur [a, b] et f' est continue sur [a, b] donc elle est bornée et atteint ses bornes.
En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur [a,b], on montrer que f est lipschitzienne sur [a,b]. Donc, $\exists\lambda\in\mathbb{R}^+$ tel que $\forall x,y\in[a,b]$, $|f(y)-f(x)|\le\lambda|y-x|$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k)\right| &=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_k)dt\right|\\ &=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)-f(x_k)dt\right|\\ &\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|f(t)-f(x_k)\right|dt\\ &\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\lambda\left|t-x_k\right|dt\\ &\le\lambda\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(t-x_k\right)dt\end{aligned}$$

En traçant la droite $y = t - x_k$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, on constate que $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x_k)dt = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\int_a^b f(t)dt - R_n\right| \leq \lambda \frac{(b-a)^2}{2n^2} \times n = \lambda \frac{(b-a)^2}{2n}$ ce qui montre que $\lim_{n \to +\infty} R_n = \int_a^b f(t)dt$.

A retenir: Si f est λ - lipschitzienne sur [a, b], L'erreur commise en remplaçant l'intégrale par R_n (resp R'_n) est majorée par $\frac{\lambda(b-a)^2}{2n} = O(\frac{1}{n})$.

---

⑤ **Preuve du théorème 24.5 : Théorème fondamental de l'analyse**

Une version animée de la preuve : https://www.youtube.com/watch?v=_bTbQFLOZ4Q