Chapitre 24: Intégration sur un segment - résumé de cours

Dans tout le chapitre, I désigne un segment, c'est-à-dire un intervalle fermé borné [a, b] de $\mathbb{R}$.

1. Fonctions en escalier.

1.1. Subdivision d'un segment [a,b].

Déf: Une subdivision σ de I = [a, b] est une famille $(x_0, x_1, ..., x_n)$ de réels vérifiant:
$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Le pas de σ est le plus grand des réels $(x_{k+1} - x_k)$ avec $0 \leq k \leq n - 1$.

Exemple à connaître: la subdivision de [a,b] donnée par $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ est une subdivision régulière de [a, b] dont le pas est $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Vocabulaire: Soit σ et σ' deux subdivisons de I. Si $\sigma \subset \sigma'$ on dit que σ' est plus fine que σ.

1.2 Fonctions en escalier

Déf: Soit f une fonction définie sur I, f est en escalier ssi il existe une subdivision σ de I telle que $\forall k \in [0, n - 1]$, f est constante sur $]a_k, a_{k+1}[$. On dit alors σ est adaptée à f.

Exemples:
★ Une fonction constante sur I est en escalier.
★ La fonction partie entière est en escalier sur tout segment de $\mathbb{R}$ (et donc sur $\mathbb{R}$).
★ Si on ajoute un point à σ, on obtient une subdivision σ' encore adaptée à f et plus fine que σ.

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 24.1 et définition: Soit f en escalier sur I et σ une subdivision adaptée à f.
On note y_k la valeur prise par f sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$.
Le réel $I_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)y_k$ est indépendant de σ et est l'intégrale de f sur [a, b] notée
$\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$

Preuve en annexe

Dans la pratique: On définit l'intégrale comme l'aire algébrique des rectangles délimités par les segments représentant f et l'axe (Ox).

Remarques: Les valeurs prises par f aux points de discontinuité, qui sont forcément des points de la subdivision n'interviennent pas dans le calcul de l'intégrale aussi deux fonctions en escalier coïncidant sur [a, b] sauf en un nombre fini de points ont la même intégrale sur [a,b].

Propriétés immédiates: Soit f et g deux fonctions en escalier sur I.
① Linéarité de l'intégrale: Pour tous réels α et β, $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$
② Positivité de l'intégrale: Si $f \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f \geq 0$
③ Croissance de l'intégrale Si $f \leq g$ sur I alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Preuve : On applique les propriétés sur les sommes finies.

✍ Exercice 24.1

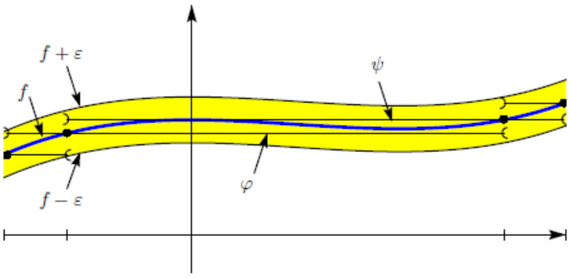
2. Intégrale d'une fonction continue :

Les preuves de ce paragraphe ne sont pas exigibles.
Il faut comprendre l'idée sous-jacente de la construction de l'intégrale d'une fonction continue

2.1 Théorème d'approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier

Théorème 24.1 (admis): Soit $f \in \mathcal{C}(I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ et $\psi \in \mathbb{E}(I)$ telles que:

$$\forall x \in I,\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \text{ et } \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$$



2.2 Intégrale d'une fonction continue :

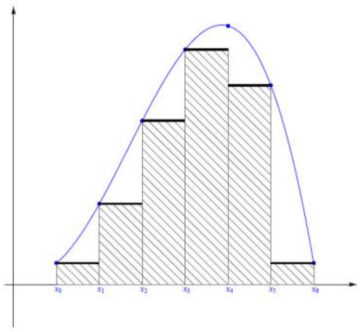
Théorème 24.2 et définition: Soit $f \in \mathcal{C}(I)$, on considère les ensembles de réels suivants:

$A^-(f) = \{ \int_a^b \varphi(t)dt$, $\varphi \in \mathbb{E}(I)$ et $\varphi \leq f\}$ *intégrales des fonctions en escalier qui minorent f sur I.*

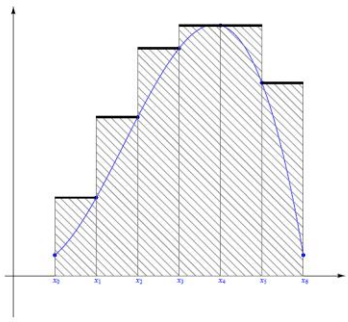
$A^+(f) = \{ \int_a^b \psi(t)dt$, $\psi \in \mathbb{E}(I)$ et $\psi \geq f\}$, *intégrales des fonctions en escaliers qui majorent f sur I.*

$A^-(f)$ admet une borne sup et $A^+(f)$ une borne inf et on a $\sup(A^-(f)) = \inf(A^+(f))$.

Ce réel est l'intégrale de f sur [a, b], notée $\int_a^b f(t)dt$ ou $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$



un réel de $A^-(f)$



un réel de $A^+(f)$

👁 Preuve en annexe

Remarques:

★ Si f ne prend que des valeurs positives, $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire du domaine plan situé sous la courbe de f, et plus généralement, l'intégrale de f sur [a, b] est l'aire algébrique du secteur plan compris entre le graphe de f, l'axe (Ox) et les droites x = a et x = b.
On retrouve la définition de l'intégrale d'une fonction continue donnée en TS.

★ La notation $\int_a^b f(t)dt$ désigne un réel dont la valeur dépend uniquement de a, b et f. la variable d'intégration t est donc muette et on peut en changer : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \ldots$

3. Propriétés de l'intégrale

3.1 Linéarité:

Proposition 24.2: Soit f et g continues sur [a, b] et deux réels α et β,
$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

Ou encore: $\Phi : f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E = $\mathcal{C}$(I)

👁 Preuve en annexe

3.2 Positivité et croissance:

Proposition 24.3: Soit f et g deux fonctions continues sur I = [a, b].

① **Positivité de l'intégrale:** Si $f \geq 0$ sur I alors $\int_a^b f \geq 0$

② **Croissance de l'intégrale**: Si $f \leq g$ sur I alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

③ **Inégalité triangulaire** Si f est continue sur [a, b], alors $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

3.3 Extension de la définition :

Convention : On décide d'étendre la généraliser la définition de l'intégrale d'une fonction continue aux cas où a = b et a > b, pour cela on pose pour f continue sur I :

- $\forall a \in I$, $\int_a^a f = 0$
- $\forall a,b \in I$, a < b, $\int_b^a f = -\int_a^b f$

Proposition 24.4 : Relation de Chasles : Soit f continue sur I, pour tout réel a,b et c de I, on a

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

Remarque : La linéarité et l'inégalité triangulaire s'étendent au cas général, pour autres les propriétés, on vérifiera que $a \leq b$.

✍ Exercices 24.2 et 24.3

3.4 Stricte positivité de l'intégrale d'une fonction continue :

Théorème 24.3 : Positivité stricte : Soit f est continue sur [a, b] avec $f \geq 0$ sur [a, b].
Si $\int_a^b f = 0$ alors f = 0 sur [a, b].

Dans la pratique :

★ Si f est continue, positive et non identiquement nulle sur [a, b] alors $\int_a^b f > 0$.

★Si f est continue et si $\int_a^b f = 0$ alors f s'annule au moins une fois sur [a, b].

✍ Exercices 24.4 et 24.5

3.4 Valeurs moyenne de f continue sur [a, b]

Déf: Soit f continue sur [a, b], la valeur moyenne de f sur [a, b] est le réel m = $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Remarque: Il s'agit de la valeur de la fonction constante ayant la même intégrale que f sur [a, b].

✍ Exercices 24.6

Proposition 24.5 : Soit $a > 0$ et f continue sur $[-a, a]$.

① Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f = 0$ et donc la valeur moyenne de f sur $[-a, a]$ est nulle.

② Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$ et donc la valeur moyenne de f sur $[-a, a]$ est égale à sa valeur moyenne sur $[0, a]$.

Proposition 24.6: Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Si f est périodique de période $T > 0$, alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{a}^{a+T} f = \int_{0}^{T} f$ et donc la valeur moyenne de f est la même sur tout segment de longueur T.

---

4. Sommes de Riemann.

Déf: Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision régulière de $[a, b]$ telle que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = a + kh$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$.

On appelle sommes de Riemann d'ordre n associée à f les réel:

$R_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\dfrac{b-a}{n})$ et $R'_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\dfrac{b-a}{n})$

Théorème 24.4: Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si R_n est la somme de Riemann d'ordre n associée à f alors $\lim R_n = \int_{a}^{b} f$

👁 Preuve en annexe

Dans la pratique: ce résultat permet deux types de raisonnements

★ Donner une valeur approchée aussi précise que l'on veut d'une intégrale dont on ne sait pas calculer la valeur exacte à l'aide de la méthode des rectangles.

★ Donner la limite de certaines sommes en faisant apparaître une somme de Riemann.

Le plus souvent on aura $a = 0$ et $b = 1$ et f continue sur $[a, b]$ ce qui donnera :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})\right) = \int_0^1 f \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\right) = \int_0^1 f$$

✍ Exercice 24.7

---

5. Intégrales et primitives, rappels et compléments

5.1 Théorème fondamental de l'analyse:

Théorème 24.5: Soit f une fonction continue sur I et a un réel de I.

La fonction F définie sur I par: $\forall x \in I$, $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

👁 Preuve en annexe

Conséquence: Une fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur I, toutes égales à une constante près.

On note $\int_I f$ une primitive de f sur I, on a $\int_I f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + Cte$

Corollaire: Si $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$, alors $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$

5.2 Mode de calcul d'une intégrale sur un segment:

① Avec une primitive

Si F est une primitive f sur [a, b] alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

② Formule d'intégration par parties

Soit u et $v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, $\forall a, b \in I$, $\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

③ Formule de changement de variable

Soit f continue sur I et φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur [a, b] à valeurs dans I

on a $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$ en effectuant le changement de variable $t = \varphi(x)$

5.3 Intégrale dépendant de ses bornes

On considère f continue sur I et u et v définies sur J à valeurs dans I.

$G : x : \mapsto \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ est alors définie sur J.

Dans la pratique : f est continue sur I donc elle admet des primitives sur I, soit F une primitive de f sur I, on a $G(x) = F(u(x)) - F(v(x))$.
Cette écriture permet l'étude de G même si on ne peut pas expliciter F comme le montre la proposition suivante à ne pas retenir par cœur.

Proposition 24.7: Soit f continue sur I, et u, v deux fonctions définies et dérivables sur J à valeurs dans I, la fonction définie sur J par $G(x)=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $\forall x \in J$, $G'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$

✍ Exercice 24.8

6. Formules de Taylor

Théorème 24.6: **Formule de Taylor avec reste intégral (Complément)**:
Si f est de classe C^{n+1} sur I et $a \in I$, on a :

$\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$.

Le polynôme $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ est le développement de Taylor de f en a à l'ordre n.

La fonction $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ est le reste intégral de f en a à l'ordre n

✍ Exercice 24.9

Corollaire 1: Majoration du reste - Inégalité de Taylor Lagrange:
Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a \in I$,

$\forall x \in I$, $|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \sup\limits_J \left|f^{(n+1)}\right| \times \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ avec J = [a, x] ou J = [x, a].

✍ Exercice 24.10

Conséquence: Si f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I en appliquant les résultats précédents à l'ordre (n - 1), on établit la formule de Taylor-Young admise dans le chapitre développements limités:

---

7. Extension aux fonctions à valeurs complexes

On rappelle qu'une fonction f définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$, est continue sur I ssi les fonctions Re(f) et Im(f) le sont.

On pose alors pour tout réel a et b de I, $\boxed{\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re} f(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)}$

Propriétés conservées:
★ La linéarité, la relation de Chasles :
★ l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Taylor-Lagrange en remplaçant la valeur absolue par le module
★ le théorème sur les sommes de Riemann.