**Chapitre 23: Déterminants-cours**

Dans ce chapitre, E est un -espace vectoriel de dimension finie n avec n ≥ 2.

**1. Déterminant d’une famille de vecteurs :**

**1.1 Forme n-linéaire sur E**

**Def:** ϕ: En→ est une forme multilinéaire ou n-linéaire sur E lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables , c'est à dire, ∀i1,n,  est linéaire.

Propriétés immédiates**:** Soitϕ: En→ une forme n-linéaire sur E et (u1, …, un)∈En.  
Si il existe i∈1, n, ui = 0E alors ϕ(u1, …, un) = 0

**Def** : Soitϕ: En→ une forme n-linéaire sur E .  
➀ ϕ est alternée si lorsque deux vecteurs des n vecteurs u1, …, un sont égaux, ϕ(u1, …, un) = 0  
➁ ϕ est antisymétrique lorsque ϕ(u1,..., un) est changé en son opposé lorsqu'on permute deux vecteurs.

**Proposition 23.1 :** Soitϕ: En→ une forme n-linéaire sur E, ϕ est alternée ssi ϕ est antisymétrique

dimension 1

**Admis** *C’est un SEV de l’EV des applications de En dans K*

**Def**: Soit B = (e1, e2, …, en) une base de E, on appelle déterminant dans la base B et on note detB, l’unique forme n-linéaire alternée vérifiant detB(e1, e2, …, en) = 1.  
Pour toute famille de vecteurs (u1, …, un)∈En, le scalaire detB(u1, …, un) est le déterminant de la famille dans la base B.

**Propriétés immédiates :**➀Si il existe i∈1, n, ui = 0E alors detB(u1, …, un) = 0  
➁ Si deux vecteurs des n vecteurs u1, …, un sont égaux, detB(u1, …, un) = 0  
➂ detB(u1,..., un) est changé en son opposé lorsqu'on permute deux vecteurs.  
➃ ∀λ∈K, ∀(u1,..., un)∈En, detB(λu1, λu2, …, λun) = λndetB(u1,..., un).

**Proposition 23.2** : Soitϕ: En→ une forme n-linéaire alternée sur E et B = (e1, e2, …, en) une base de E.  
∃λ∈K, ϕ = λdetB et on a λ = ϕ(e1, e2, …, en)

**1.3 Caractérisation des bases :**

Soit B = (e1, e2, …, en) une base de E.

**Proposition 23.3** : Soit (u1, …,un) une famille de vecteurs de E  
➀ Si (u1, …,un) est liée alors detB((u1, …,un) = 0  
➁ Si deux des vecteurs de (u1, …,un) sont colinéaires alors detB((u1, …,un) = 0

**Proposition 23.4 :** Si B et B’ sont deux bases de E alors  
detB’ = detB’(B)×detB et detB’(B)detB(B’) = 1

**Théorème 23.2**: Soit (u1, …,un) une famille de vecteurs de E.  
(u1, …,un) est une base de E ⇔ detB(u1, …,un) ≠ 0

**1.4 Expression du déterminant en dim 2 et 3**

**a) En dimension 2**

**Proposition 23.5**: Soit (u, v)∈E2 avec u = x1e1 + x2e2 et v = y1e1 + y2e2,.

Interprétation du déterminant dans la base canonique :

|  |  |
| --- | --- |
| Soit B = (e1, e2) est la base canonique de E = ².  L’application : ϕ :E2  .  (u, v) aire algébrique du  parallélogramme formé sur (u, v) |  |

Cette application est : - linéaire par rapport à chacune des variables.

- alternée : ∀u∈2, ϕ(u, u) = 0

- ϕ(e1, e2) = 1 (unité d’aire)

On a donc : ϕ = detB.

**b) En dimension 3:**

**Proposition 23.6**: Soit (u, v, w)∈E3 avec u = x1e1 + x2e2 + x3e3, v = y1e1 + y2e2 +y3e3  
et w = z1e1 + z2e2 + z3e3.

*On a développé par rapport à la première colonne*

Interprétation du déterminant dans la base canonique :

|  |  |
| --- | --- |
| On suppose que B = (e1, e2, e3) est la base canonique de E = 3.  On considère ϕ : E3  .  (u, v, w) volume algébrique du  parallélépipède formé sur (u, v, w)  Cette application est linéaire par rapport à chacune des variables, alternée et vérifie :  ϕ(e1, e2, e3) = 1. (unité de volume)  On a donc : ϕ = detB |  |

**2 Déterminant d’une matrice carrée :**

**2.1 Définition et propriétés immédiates**

**Def :** On appelle déterminant de la matrice carrée A∈Mn(), le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de n. On le note : det(A).

Notation : Si , on note det(A) = 

**♥ Propriétés immédiates :**➀ L’application det : M*n*() est l’unique forme *n*-linéaire alternée par rapport aux colonnes de sa variable qui vérifie : det I*n* = 1  
**➁** Le déterminant d’une matrice carrée ayant une colonne nulle est nul.   
**➂** Le déterminant d’une matrice carrée ayant deux colonnes égales est nul.  
**➃** Le déterminant d’une matrice carrée ayant deux colonnes proportionnelles est nul  
➄ Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres alors det(A) = 0  
➅ AMn(), λ, det(λA) = λn det(A) et donc det(-A) = (-1)ndet(A)

**2.2 Caractérisation des matrices inversibles :**

**Proposition 23.7** : Soit A et B dans Mn()  
➀ det(AB) = det(A)det(B)  
➁ p, det(Ap) = (det(A))p  
➂ Si AGLn() ⇔ det (A) ≠ 0et dans ce cas det(A-1) = 1/det(A)

Attention : Le det n’est pas une forme linéaire! En général det(A + B) ≠ det(A) + det(B)

**2.3 Calcul pratique du déterminant d’une matrice carrée**

**a) Développement par rapport à une ligne ou à une colonne**

**Def:** Soit A = (ai,j)∈Mn(K). On note Ai,j la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A. On appelle mineur d'indice (i,j) le déterminant Δi,j de Ai,j.

**Proposition 23.8** : Soit AMn(), on a   
➀ det(A) =  *développement selon la ligne io*  
➁ det(A) =  *développement selon la colonne j0*

Ce qui donne par exemple, pour une matrice 3×3, en développant selon la deuxième ligne:  


Les signes à utiliser peuvent être mémorisés comme suit: .

**Corollaire :** Soit AMn(), **➀** Si A est triangulaire, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux :



➁ Si A est diagonale, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux



**b) Effet des opérations élémentaires sur les colonnes (OEC) de A**

**Proposition 23.9:** Soit AMn().  
➀ Si  alors det(A’) = - det(A) ➁ Si  alors det(A’) = λdet(A)  
➂ Si  alors det(A’) = det(A) et plus généralement, ajouter à une colonne de A une CL des autres colonnes ne change pas le déterminant de A.

Preuve: Le déterminant est une forme n-linéaire antisymétrique et alternée par rapport à ses colonnes.

c) Effets opérations élémentaires sur les lignes (OEL) de A

**Proposition 23.10:** ∀A∈Mn(K), det(A) = det(AT) *admis*

Conséquence : Le det est une forme n-linéaire antisymétrique alternée par rapport à ses lignes.

**Proposition 23.11:** Soit AMn().  
➀ Si  alors det(A’) = - det(A) ➁ Si  alors det(A’) = λdet(A)  
➂ Si  alors det(A’) = det(A) et plus généralement, ajouter à une colonne de A une CL des autres colonnes ne change pas le déterminant de A.

**Méthode générale de calcul du déterminant d’une matrice carrée** : On va donc utiliser des OEC ou des OEL (pivot de gauss par exemple) pour se ramener à une matrice triangulaire ou à une matrice contenant suffisamment de zéros pour que le calcul soit trivial ou amène une relation de récurrence

**3. Déterminant d’un endomorphisme**

**3.2 Déterminant d'un endomorphisme**

**Proposition 23.12 et définition**: Soit E un -ev de dimension n, B = (e1, …, en)une base de E, f∈(E), et M la matrice de u dans la base B. Le scalaire det(M) est indépendant du choix de B et est appelé déterminant de f.

Dans la pratique: det(f) = det(M) = det(f(e1),...,f(en)) avec B une base de E que l’on peut choisir arbitrairement et si possible telle que M soit triangulaire.

**Proposition 23.13**: Soit f, g∈(E) et λ∈  
➀ det(0(E)) = 0 ➁ det(IdE) = 1  
➂ det(λf) = λndet(f) ➃ det(gοf) = det(g).det(f)  
➄ f est un automorphisme ⇔ det(f)≠0 ➅ Si f∈GL(E) alors det(f-1) = 