Exercices – Chapitre 1: Ensemble de nombres usuels, inégalités

♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

Ensembles

♥ **1.1** A, B et C sont trois parties d'un ensemble E.
Montrer que $(A\cup B)\cap C \subset A\cup(B\cap C)$ avec égalité si et seulement si $A \subset C$

♥ **1.2** A, B et C sont trois parties d'un ensemble E. Montrer les équivalences suivantes:
a. $A\cup B = A\cap B \Leftrightarrow A = B$ **b.** $A\cup B = A\cap C \Leftrightarrow B\subset A\subset C$
c. $[\ (A\cup B) = (A\cup C)$ et $(A\cap B) = (A\cap C)\ ] \Leftrightarrow B = C$

Inégalités dans IR

1.3 On donne $0 < a \le x \le b$, $d \le y \le c < 0$ et $0 < e \le z \le f$. Encadrer les réels suivants

$\alpha = 4x - 2y$ $\beta = xy$ $\gamma = \dfrac{x-y}{z}$ $\delta = x^2 + y^2$ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}x - y^2$

♥ **1.4** ***Des classiques.***
a. Démontrer rapidement les inégalités suivantes à retenir et à réutiliser:

a) $\forall x \ge 0$, $\ln(1 + x) \le x$ b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $1 + x \le e^x$ c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $|\sin x| \le |x|$

♥ **1.5** ***Inégalités entre les moyennes***

Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose $m = \dfrac{a+b}{2}$, $g = \sqrt{ab}$ et $h = \dfrac{2ab}{a+b}$

Montrer que $g \le m$ puis que $h \le g \le m$ puis en déduire que $\forall x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$

♥ **1.6** Montrer les assertions suivantes
a) Montrer que: $\forall x\in[0,1]$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $0 \le x^k(1 - x)^k \le 1$
b) Montrer que: $\forall x\in[0,1]$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $0 \le x^k(1 - x)^k \le x^k$
c) Montrer que: $\forall x\in[0,1]$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $0 \le x^k(1 - x)^k \le (1 - x)^k$
d) Montrer que: $\forall x\in[0,1]$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $0 \le x^k(1 - x)^k \le \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$

En déduire que: $\forall x\in[0,1]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k = 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + \cdots + x^n(1-x)^n \le \dfrac{4}{3}$

1.7 Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2 - x + \dfrac{1}{2} > 0$, puis que $\forall a, b\in\mathbb{R}$, $a + b < (1 + a^2)(1 + b^2)$

♦ **1.8** a) Montrer que pour tous réels x et y on a : $(x + y)^2 \ge 4xy$
b) En déduire que $\forall a, b, c\in]0\ ;+\infty[$, $(b + c)(c + a)(a + b) \ge 8abc$.
c) Montrer que $\forall a, b, c\in]0\ ;+\infty[$, $(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}) \ge 9$

Récurrence

1.9 Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n < 2^n$

1.10 Pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{N}$, a-t-on, $n^2 \le 2^n$?

Majorant, minorant, borne sup, borne inf

♥ **1.11** Donner lorsqu'ils existent, les majorants, les minorants, la borne sup, la borne inf le plus petit élément, le plus grand élément des ensembles suivants :

$I = \{x\in\mathbb{R}^* \mid -2 < x + \dfrac{1}{2x} \le 2\}$ $A = \left\{1 + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $B = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

1.12 a) Soit A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Comparer sup(A), sup(B), inf(A) et inf(B).

b) Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b,\ a\in A,\ b\in B\}$.
Montrer que A + B admet une borne supérieure puis que sup(A + B) = sup(A) + sup(B).

Valeur absolue, partie entière

1.13 Traduire les inégalités suivantes en termes d'appartenance à un intervalle que l'on représentera sur la droite réelle :

a) $|x - 1| \leq 2$ b) $|x + 1| < \varepsilon$ c) $|x - a| \leq \frac{1}{2}$ d) $|x + 2a| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $a\in\mathbb{R}$.

1.14 Représenter sur la droite réelle les parties de $\mathbb{R}$ suivantes et préciser lesquelles sont des intervalles.

a) $|x + 3| > 2$ b) $|2x + 1| < \varepsilon$ c) $|4x - 2| \geq 4$ d) $|x + 1| + |x - 2| > 5$.

♥ **1.15** Soit $a\in\mathbb{R}$, montrer que $(\forall\varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$

1.16 Soit x, y deux réels. Montrer que $\max(x, y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x, y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$

♦ **1.17** Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\big||x+2|-|2x-1|\big| = \big||x+1|-|2x-2|\big|$

♥ **1.18** Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{\ |x - y|,\ (x, y)\in A^2\ \}$.
Justifier que B est bornée puis calculer sup(B) et inf(B), sont-ils respectivement les plus grand et plus petit élément de B ?

♦ **1.19** Démontrer les inégalités suivantes, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

a) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$. b) $1 + |xy - 1| \leq \left(1 + |x - 1|\right) \times \left(1 + |y - 1|\right)$

♥ **1.20** Soit $x\in\mathbb{R}$, calculer $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

1.21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 2$

♥ **1.22** Montrer les égalités suivantes où $x, y\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ b) $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

♦ **1.23** Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left\lfloor \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \right\rfloor = 4n+1$

Différents types de raisonnements

♥ **1.24** Montrer par disjonction des cas que pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

♦ **1.25 *$\mathbb{Q}$ ne possède pas la propriété de la borne supérieure :***
Montrer que $A = \{\ x\in\mathbb{Q}\ ,\ x^2 \leq 2\ \}$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{Q}$ qui n'admet pas de borne supérieure. *On pourra raisonner par l'absurde*

♥ **1.26** Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor x+2 \rfloor$ $(\mathcal{E})$

a. ***Analyse*** : On suppose que x est une solution de $(\mathcal{E})$. Montrer que $x\in]-2\ ;\ 0[$

b. ***Synthèse*** : Soit $x\in]-2\ ;0[$, x est-il une solution de $(\mathcal{E})$?

c. Conclure.