Chapitre 1 : Ensemble de nombres usuels, inégalités - poly de cours – Partie 1

1. Notions de base sur les ensembles

1.1 Généralités:

Def : Un ensemble est une collection d'objets. On peut le décrire de différentes façons:
- En le nommant si une notation lui a été attribuée: $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$…
- En extension c'est à dire en listant ses éléments :

$A = \{1, -3, 2\}$ $\quad$ $B = \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}$ $\quad$ PCSI2 = {Alexis, …. , Zoé}

- En compréhension c'est à dire en caractérisant ses éléments par une propriété $\mathcal{P}$

Si $A = \{x \in E, \mathcal{P}(x)\}$, alors A contient tous les éléments de E pour lesquels $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

- En utilisant un paramètre

$A = \{2n + 3, n \in \mathbb{N}\}$

On peut décrire un même ensemble en utilisant différentes méthodes :
$3\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divisible par } 3\} = \{3k, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\}$

★ Vocabulaire et notations :
- Si un ensemble E contient l'élément a on note $a \in E$ et on dit que a appartient à E.

Sinon, on note: $a \notin E$.

- Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'ensemble vide noté $\varnothing$.
- Un ensemble ne contenant qu'un seul élément s'appelle un singleton. On note $E = \{a\}$.
- Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments.

1.2 Parties d'un ensemble, inclusion:

Def: Soit E et A deux ensembles. A est une partie de E, ou un sous-ensemble de E lorsque tout élément de A est dans E.
On note $A \subset E$ et on lit "A est inclus dans E"
On a $(A \subset E)$ ssi $(\forall x \in A, x \in E)$ ssi $(x \in A \Rightarrow x \in E)$

⌿ Attention à ne pas confondre :
$\in$ est réservé aux éléments $\qquad$ $\subset$ est réservé aux parties.

Exemples: $\{-1, 2, \sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}$

En pratique: Comment démontrer une inclusion ?
On prend un élément quelconque de A (Soit $x \in A$…) et on montre qu'il est nécessairement dans B (…..donc $x \in B$). On conclut : $A \subset B$.

Proposition : Soit A, B et C trois ensembles.
① $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$
② Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$

Conséquence pratique: Pour démontrer que $A = B$ on a deux méthodes possibles:
★ Double inclusion: $A \subset B$ et $B \subset A$ ou encore $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ et $(x \in B \Rightarrow x \in A)$
★ Equivalence: $(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$

Déf: On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.

$\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\varnothing$ et E.

⌿ Attention: $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont les éléments sont des ensembles.

1.3 Opérations sur les parties d'un ensemble:

a) Réunion et intersection:

Def: Soit A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
L'intersection de A et de B est $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A$ **et** $x \in B\}$
La réunion de A et de B est $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A$ **ou** $x \in B\}$.

★ Vocabulaire: Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

b) Complémentaire:

Def: Soit A une partie de E, le complémentaire de A dans E est noté $\overline{A}$ ou A^C et défini par :
$\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$

c) Différence:

Def: Soit A et B des parties de E. La différence de A et de B est $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
On lit "A moins B" ou A privé de B".

★ Remarques : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ et $\overline{A} = E \setminus A$

1.4 Produit cartésien de deux ensembles:

Def: Soit E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F noté ExF est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.
$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$

Exemple: $(-1, \sqrt{2}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$

★ Notation: Si E = F, ExF = ExE est noté E^2.

Def : Soit E un ensemble, un n-uplet de E est une liste ordonnée d'éléments de E que l'on peut noter $(x_1, x_2, ..., x_n)$. L'ensemble de ces n-uplets constitue le produit cartésien $E^n = E \times E \times ... E$.

Exemples :
- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. $(0, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$,
- $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels.

---

2. Ensembles de nombres usuels

2.1 Les entiers :

Def : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, n+1, ...\}$,

Si on admet les 3 propriétés suivantes comme des **axiomes** :
① Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
② Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée admet un plus grand élément.
③ $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

On peut alors montrer que
★ $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément qui est 0.
★ Tout entier $n \in \mathbb{N}$ a un successeur noté (n+1)
★ Tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a un prédécesseur noté (n-1)
★ La validité de la démonstration par récurrence :

Principe de récurrence:

Si $\begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{Pour un entier n quelconque, } n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Vocabulaire:

★ Vérifier $\mathcal{P}(n_0)$ constitue l'**initialisation** du raisonnement par récurrence.

★ Une propriété $\mathcal{P}(n)$ vérifiant $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est dite **héréditaire**.

Attention: Une propriété peut être héréditaire et par ailleurs, fausse! L'étape d'initialisation est donc indispensable pour conclure.

Def : $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs. Il contient $\mathbb{N}$ et tous les opposés des entiers naturels.

On note $[\![n, p]\!]$ la partie de $\mathbb{Z}$ définie par $\{x\in\mathbb{Z}, n \leq x \leq p\}$.

$[\![-1, 10]\!] = \{ -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

2.2 Les rationnels

Def : $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels. $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b}, a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^* \}$.

Tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où les entiers p et q sont premiers entre eux.

$\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux. $\mathbb{D} = \{ \frac{a}{10^n}, a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N} \}$. $\mathbb{D}$ est strictement inclus dans $\mathbb{Q}$.

2.3 Les réels

Def : $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels. Il contient toutes les longueurs et leurs opposées

Les réels non rationnels sont dits irrationnels ils forment l'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

$\sqrt{2}$, π et e sont irrationnels.

On représentera $\mathbb{R}$ par un axe gradué appelé droite réelle ou droite numérique.

L'ensemble des nombres réels est muni de 2 opérations : l'addition et la multiplication.

★ L'addition dans $\mathbb{R}$ vérifie :

- Elle est *interne* dans $\mathbb{R}$: $\forall(a, b) \in\mathbb{R}^2$, $a + b \in \mathbb{R}$
- Elle est *associative* : $\forall(a, b, c) \in\mathbb{R}^3$, $(a + b) + c = a + (b + c)$
- 0 est *neutre* pour l'addition $\forall a \in\mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a$
- Tout élément a de $\mathbb{R}$ admet *un opposé*, appartenant à $\mathbb{R}$, noté $-a$ tel que :
$a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- Elle est *commutative* : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b = b + a$.

★ La multiplication dans $\mathbb{R}$ vérifie :

- Elle est *interne* dans $\mathbb{R}$: $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $a \times b \in \mathbb{R}$
- Elle est *associative* : $\forall(a, b, c)\in\mathbb{R}^3$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- 1 est *neutre* pour la multiplication : $\forall a \in\mathbb{R}$, $a \times 1 = 1 \times a$
- Elle est *commutative* : $\forall(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $a \times b = b \times a$

• la multiplication est *distributive par rapport à l'addition* :
$\forall(a, b, c)\in\mathbb{R}^3$, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
$\forall(a, b, c)\in\mathbb{R}^3$, $c \times (a + b) = c \times a + c \times b$

• Tout élément **non nul** a de $\mathbb{R}$, admet *un inverse*, appartenant à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, noté a^{-1} ou $\frac{1}{a}$, tel que :

$a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.$

Vocabulaire : $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication est un ***corps commutatif***.

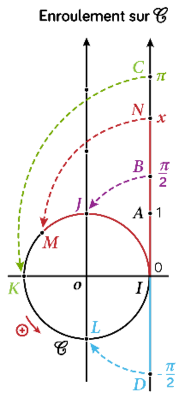
• 0 est *absorbant* : $\forall a \in\mathbb{R}$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$

• *Règle du produit nul* : $\forall(a, b) \in\mathbb{R}^2$, $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$

---

2. Cosinus et sinus d'un réel

Def : Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, on associe à tout réel x un unique point du cercle noté M. L'abscisse de M est le cosinus de x et son ordonnée le sinus de x.



Def : Soit x et y deux réels. On dit que x et y sont congrus modulo 2π et on note $x \equiv y\ [2\pi]$, lorsqu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$

Propriétés : $\forall x, y\in\mathbb{R}$, $x \equiv y\ [2\pi] \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$

♥ Se reporter à la fiche de trigonométrie pour les formules à connaître et leurs justifications

---

3. Ordre dans $\mathbb{R}$

3.1 Définition et compatibilité avec les opérations

Def : Soit x et y deux réels. On dit que y est plus grand que x et on note $x \leq y$ lorsque la différence $(y - x)$ est un réel positif.

Propriétés immédiates : La relation précédente est
• Réflexive: $\forall x\in\mathbb{R}$, $x \leq x$
• Antisymétrique: $\forall x\in\mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow y = x$
• Transitive: $\forall x, y, z\in\mathbb{R}$, $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

On peut toujours comparer deux réels, on dit que la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
Ou encore que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

Proposition 1.1 : La comparaison est compatible avec l'addition et la multiplication
① On peut ajouter un réel quelconque aux deux membres d'une inégalité :
$\forall$ (x, y, z) $\in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
② On peut multiplier par un réel quelconque les deux membres d'une inégalité :
- sans changer son sens si ce réel est positif : $\forall(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}_+$, $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$
- en changeant son sens si ce réel est négatif : $\forall(x, y) \in\mathbb{R}^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}_-$, $x \leq y \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y$.
③ On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens :
$\forall(x, y, x', y')\in\mathbb{R}^4$, $(x \leq y)$ et $(x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y'$.
④ On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **PORTANT SUR DES REELS POSITIFS** : $\forall(x, y, x', y')\in\mathbb{R}^4$, $(0 \leq x \leq y)$ et $(0 \leq x' \leq y') \Rightarrow 0 \leq xx' \leq yy'$.

Attention : Des erreurs à éviter
- Avant de multiplier une inégalité par un réel, on étudie son signe.
- On ne soustrait pas membre à membre deux inégalités.
- On ne divise pas membre à membre deux inégalités.

3.2 Méthodes pratiques pour comparer deux réels :

★ Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence. Pour étudier le signe de cette différence on peut :

- Utiliser les résultats suivants :
  - La somme de deux réels positifs est positive.
  - Le produit de deux réels de même signe est positif, le produit de deux réels de signes contraires est négatif. *Tableau de signes.*
  - Le carré d'un réel est positif et la racine carrée d'un réel positif est positive.
- Etudier une fonction.

★ Pour comparer deux nombres on peut utiliser le sens de variation des fonctions usuelles.
Si f est croissante sur I intervalle de $\mathbb{R}$ alors $\forall x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
Si f est décroissante sur I intervalle de $\mathbb{R}$ alors $\forall x, y \in I$, $x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$
Applications :
- Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés et que leurs racines carrées.
- Deux réels strictement de même signe, non nuls, sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse $0 < x \leq y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ et $x \leq y < 0 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} < 0$

Attention : Avant de passer aux inverses dans une inégalité on vérifie que les deux membres sont non nuls et de même signe.

★ Pour établir une inégalité, on peut se ramener à une étude de signe, utiliser les règles sur l'ordre ou encore faire une démonstration par récurrence.

3.3 Majorants, minorants:

Def: Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux réels
- M est un majorant de A signifie que $\forall x\in A$, $x \leq M$
- m est un minorant de A signifie que $\forall x\in A$, $m \leq x$.
- On dit que A est majorée lorsqu' elle admet un majorant M et alors tous les réels supérieur à M sont aussi des majorants de A.
- On dit que A est minorée ssi elle admet un minorant m et alors tous les réels inférieur à m sont aussi des minorants de A.
- A est bornée ssi elle est majorée et minoré

3.4 Plus grand élément et plus petit élément:

Def: Soit A une partie de $\mathbb{R}$, m et M deux réels
- M est le plus grand élément de A lorsque M majore A et $M \in A$.
- m est le plus petit élément de A lorsque m minore A et $m \in A$.

Proposition 1.2: Soit A une partie de $\mathbb{R}$, si A admet un plus grand (resp petit) élément alors celui-ci est unique.

Notation: Si A admet un plus grand élément on le note max(A) et si A admet un plus petit élément on le note min(A).

3.5 Borne supérieure, borne inférieure

Def: Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
La borne supérieure de A est, si il existe, le plus petit des majorants de A.
La borne inférieure de A est, si il existe, le plus grand des minorants de A.
Sous réserve d'existence, on note sup(A) et inf(A) les réels ainsi définis.

Remarque: Si A possède un plus grand (resp plus petit) élément c'est nécessairement sa borne sup (resp inf).

Proposition 1.3: Caractérisation de la borne supérieure. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$
$\alpha = \sup(A) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq \alpha$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ \alpha - \varepsilon < x$
$\beta = \inf(A) \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \geq \beta$ et $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x < \beta + \varepsilon$

Important : Il faut savoir faire un schéma illustrant ces caractérisations.

Théorème 1.1 (admis): Toute partie non vide et majorée (resp minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Conventions : Si A n'est pas majorée, on convient que $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minorée, que $\inf(A) = -\infty$

Vocabulaire : On dit que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure.

---

4. Valeur absolue d'un réel, intervalles de $\mathbb{R}$:

Def : Soit x un réel, la valeur absolue de x est le réel positif noté $|x|$ et défini par
$|x| = \max(x, -x)$

Dans la pratique : Pour tout réel x, $|x| =$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$

Proposition 1.4 : Propriétés de la valeur absolue : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a

① $-|x| \leq x \leq |x|$	③ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
② $|-x| = |x|$	④ $\sqrt{x^2} = |x|$
⑤ $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$	⑦ $|x/y| = |x|/|y|$ avec $y \neq 0$
⑥ $|xy| = |x|\,|y|$	⑧ $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Def : Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si dès qu'elle contient deux réels a et b, elle contient tous les réels compris entre a et b.
Ou encore I est un intervalle de $\mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall (a, b) \in I^2, a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$.

Vocabulaire : les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Classification des intervalles de $\mathbb{R}$: Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

★ $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

★ **Les intervalles bornés de $\mathbb{R}$** :

• $[\, a, b\,] = \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b \}$ intervalle fermé borné ou *segment*.
• $[\, a, b\,[= \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x < b \}$ intervalle borné semi-ouvert à droite.
• $]\, a, b\,] = \{ x \in \mathbb{R}, a < x \leq b \}$ intervalle borné semi-ouvert à gauche.
• $]\, a, b\,[= \{ x \in \mathbb{R}, a < x < b \}$ intervalle borné ouvert.

★ **Les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$**:

• $[\, a, +\infty\,[= \{ x \in \mathbb{R}, a \leq x \}$ intervalle fermé non majoré.
• $]\, a, +\infty\,[= \{ x \in \mathbb{R}, a < x \}$ intervalle ouvert non majoré.
• $]-\infty, b\,] = \{ x \in \mathbb{R}, x \leq b \}$ intervalle fermé non minoré.
• $]-\infty, b\,[= \{ x \in \mathbb{R}, x < b \}$ intervalle ouvert non minoré.

Dans la pratique : Il peut être utile de paramétrer le segment [a, b] en le considérant comme l'ensemble $\{ ta + (1 - t)b, t\in[0,1] \}$.
Ainsi $x\in[a, b] \Leftrightarrow \exists t\in[0,1], x = ta + (1 - t)b$

Def : On définit la distance entre deux réels x et y par $d(x, y) = |x - y|$

Proposition 1.5 : Propriétés de la distance : $\forall x, y, z\in\mathbb{R}$.
① $d(x, y) = d(y, x)$ ② $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ③ $d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y)$

Dans la pratique : Soit x et a deux réels et r un réel positif

$|x - a| = r \Leftrightarrow d(x,a) = r \Leftrightarrow x = a + r$ ou $x = a - r$

$|x - a| \leq r \Leftrightarrow d(x,a) \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r, a + r]$

$|x - a| \geq r \Leftrightarrow d(x,a) \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r$ ou $x \geq a + r \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty, a - r] \cup [a + r,+\infty[$

---

5. Partie entière, approximations décimales

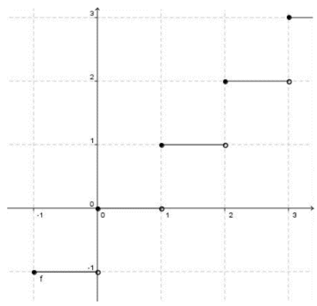
5.1 Partie entière

Def: Soit $x\in\mathbb{R}$, la partie entière de x est l'unique entier $n\in\mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On note $n = \lfloor x \rfloor$ ou $n = E(x)$.

Exemples : $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 1{,}5 \rfloor = 1$, $\lfloor -1{,}5 \rfloor = -2$

Attention aux négatifs !!

La fonction partie entière est en escalier



$\lfloor x \rfloor = \max \{ n\in\mathbb{Z}, n \leq x \}$

Proposition 1.6: propriétés de la partie entière

① $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ $\quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ $\quad 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$

② $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$

③ $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

④ $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$

5.2 Approximations décimales d'un réel :

Déf : On dit que x' est une valeur approchée de x à ε près ssi $|x - x'| \leq \varepsilon$
Si $x' \leq x$ alors x' est une valeur approchée de x par défaut.
Si $x' \geq x$ alors x' est une valeur approchée de x par excès.

Proposition 1.7 : Soit $x \in \mathbb{R}$, $d_n = \dfrac{\lfloor x 10^n \rfloor}{10^n}$ est l'approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près et $d_n + 10^{-n}$ est son approximation décimale par excès à 10^{-n} près.