

## Exercices-Chapitre 3: Fonctions usuelles partie 1

## ♦ Exercice corrigé - ♥ A savoir refaire

♦ *Calculs algébriques, inégalités, égalités*

♥ 3.1 Montrer les inégalités suivantes:

a.  $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

b.  $\forall t > -1, \frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t) \leq t$

Pour ces deux inégalités, préciser les cas d'égalité

c.  $\forall x > 0, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$

Indic : Utiliser b.

d.  $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall \alpha \in ]0, 1[, (1+x)^\alpha < 1 + x^\alpha$

e.  $\forall x \in ]0, 1[, x^x (1-x)^{(1-x)} \geq \frac{1}{2}$

f.  $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

3.2 Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < a < b$  et  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ .Montrer que  $f$  est strictement croissante sur son ensemble de définition et en déduire que

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$$

3.3 **Trigonométrie hyperbolique:** Soit  $a$  et  $b$  deux réelsa. Justifier que  $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$  puis que  $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)$ .b. Donner des formules pour  $\operatorname{ch}(a-b)$ ,  $\operatorname{sh}(a-b)$ ,  $\operatorname{ch}(2a)$  et  $\operatorname{sh}(a)$ .c. Linéariser  $\operatorname{ch}^2(a)$  et  $\operatorname{sh}^2(a)$ .d. Transformer  $\operatorname{ch}(a) + \operatorname{ch}(b)$  en produit.**Equations, inéquations**♥-♦ 3.4 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a.  $\ln|x-1| + \ln|x+3| = \ln|3x^2 - 4x + 1|$

b.  $e^x - 3e^{-x} = 4$

c.  $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$

d.  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

e.  $3^x + 4^x = 5^x$

♦ 3.5 Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants : 
$$\begin{cases} x+y=7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$
3.6 Résoudre dans  $\mathbb{R}$ :

a.  $5\operatorname{ch}(x) - 4\operatorname{sh}(x) = 3$

b.  $\operatorname{ch}(x) \geq 2$

c. 
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = 4 \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = 1 \end{cases}$$

♦ 3.7 Déterminer les valeurs des réels  $a$  et  $b$  pour lesquelles le système (S): 
$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = a \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = b \end{cases}$$
 admet des solutions dans  $\mathbb{R}^2$ .

♥ 3.8 Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes

- a.  $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \leq \frac{1}{2}$     b.  $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$     c.  $\tan x < \frac{1}{\sqrt{3}}$   
 d.  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$     e.  $\tan(x)\tan(2x) = 1$     f.  $\cos x > \cos \frac{x}{2}$  sur  $[0, 2\pi[$   
 g.  $\cos(x) + \cos(2x) \geq 0$

### Propriétés globales

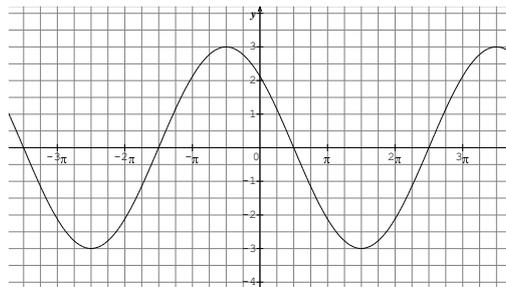
3.9 Donner l'ensemble de définition puis étudier la parité et la périodicité des fonctions suivantes et en déduire un intervalle d'étude possible.

$$f(t) = \sin^2(t)\cos(2t) \qquad g(t) = \frac{1}{\cos t + \cos(2t)}$$

♥ 3.10 Etudier la périodicité des fonctions suivantes

$$g_t : x \mapsto A\cos(\omega t - kx + \varphi) \qquad g_x : t \mapsto A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

♥ 3.11 Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  avec  $A, \omega$  et  $\varphi \in \mathbb{R}$ . On donne, ci-dessous, la représentation graphique de  $f$ . Déterminer les réels  $A, \omega$  et  $\varphi$ .



### Etude de fonctions:

3.12 Etudier la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g(x) = x^2 \sqrt{|\ln x|}$  si  $x > 0$  et  $g(0) = 0$

3.13 Etudier sur  $\mathbb{R}$  les fonctions suivantes :  $f : t \mapsto 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$  et  $g : x \mapsto \cos^2 x - \cos x + 1$

♦ 3.14 On considère la fonction :  $f : x \mapsto -2 \frac{\sin^3 x}{\cos x}$

a. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ . On notera  $D$  ce domaine.

Montrer que :  $\forall x \in D, f(x) = \sin(2x) - 2\tan(x)$

b. Etudier la fonction  $f$  et tracer l'allure de sa courbe représentative.

♥ 3.15 Fonction  $u^v$

a. Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto (3x^2)^x \qquad g : x \mapsto (\cos x)^x \qquad u : x \mapsto (\ln x)^{\sqrt{x}} \qquad v : x \mapsto (\tan x)^{x^2}$$

b. Etudier les fonctions suivantes :

$$u(x) = x^x \qquad v(x) = x^{\frac{1}{x}} \qquad \diamond w(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

**3.16** Soit  $I$  un intervalle et  $f$  définie sur  $I$  par  $\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

- Déterminer  $I$  sachant que  $I$  est le plus grand intervalle de  $\mathbb{R}_+$  contenant 0 sur lequel on peut définir  $f$ .
- Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.
- Donner l'allure de la courbe représentative de  $f$  et de  $f^{-1}$ .
- Préciser le domaine de dérivabilité et la dérivée de  $f^{-1}$ .

### Raisonner

♥ **3.17** a. Etudier la fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  sur  $]0, +\infty[$ .

- Trouver tous les entiers  $n$  et  $m$  strictement positifs et distincts tels que  $n^m = m^n$
- Discuter suivant les valeurs de  $n \in \mathbb{N}^*$ , le nombre de solutions de  $e^x = x^n$

♦ **3.18** Résoudre dans  $\mathbb{R} : x^6 + x^4 = 810$

♦ **3.19** Soit  $a$  et  $b$  des réels tels que  $0 < a < b$ .  
Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$

♥ **3.20** Déterminer toutes les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^*$  et vérifiant la propriété :

$$\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

♦ **3.21** Soit  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , résoudre dans  $\mathbb{R}, x^{x^n} = n$

*On pourra commencer par se demander s'il y a des solutions.*



**“It’s important to learn math because someday you might accidentally buy a phone without a calculator.”**