Chapitre 4: Nombres complexes et applications – Partie 1

1. L'ensemble des nombres complexes

1.1 Présentation:

On admet qu'il existe un ensemble possédant les propriétés suivantes:
★ Cet ensemble contient $\mathbb{R}$ et on peut y prolonger les opérations usuelles en conservant leurs propriétés.
★ Cet ensemble contient un élément noté i vérifiant $i^2 = -1$.

Déf: Cet ensemble est $\mathbb{C} = \{x + iy, x \text{ et } y \text{ réels}\}$. et ces éléments sont appelés nombres complexes. Soit $z \in \mathbb{C}$, **z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels.** cette écriture est la **forme algébrique** de z.

Vocabulaire: Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
★ x est la partie réelle de z, on note $x = \mathrm{Re}(z)$
★ y est la partie imaginaire de z, on note $y = \mathrm{Im}(z)$

Propriétés immédiates: Pour tous réels a et b et tout complexe z :
① $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$
② $z = z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$
③ $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Interprétation géométrique: On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, qu'on qualifie alors de plan complexe.
A tout nombre complexe $z = x + iy$ on peut associer:
★ le point M de coordonnées (x, y)
★ le vecteur $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

z est appelé affixe de M ou de $\vec{w}$ selon le cas.
Si a est l'affixe de A et b l'affixe de B alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$.

Déf: Un imaginaire pur est un nombre complexe dont la partie réelle est nulle.
L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$ ou encore $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) = 0\}$

Interprétation géométrique: Soit M(z) le point d'affixe z dans le plan complexe.
★ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M(z) \in (Ox)$
★ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M(z) \in (Oy)$

0 est à la fois réel et imaginaire pur et c'est le seul. Ainsi, $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

1.2 Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Déf: Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.
La somme de z et de z' est $z + z' = (x + x') + i(y + y')$

Propriétés de l'addition dans $\mathbb{C}$:
① L'addition dans $\mathbb{C}$ a les mêmes propriétés que l'addition dans $\mathbb{R}$
② $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
③ Tout nombre complexez $= x + iy$ possède un opposé noté $-z$ et $-z = -x - iy$
$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(-z) = -\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(-z) = -\mathrm{Im}(z)$

Déf: la différence $z - z'$ est la somme $z + (-z')$.

Déf: Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.
Le produit de z et de z' est $zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$
① La multiplication dans $\mathbb{C}$ a les mêmes propriétés que la multiplication dans $\mathbb{R}$.
② Tout nombre complexe non nul possède un inverse.
③ $\times$ est distributive sur $+$: Pour tout z, z' et z'' dans $\mathbb{C}$, $z(z' + z'') = zz' + zz''$.
④ $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$

Déf: Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel:
- Si $z' \neq 0$, le quotient $\dfrac{z}{z'}$ est défini par $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{1}{z'}$
- $z^0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} = z \times z^n$ et si $z \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$

A retenir: $i^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 4k \\ i \text{ si } n = 4k+1 \\ -1 \text{ si } n = 4k+2 \\ -i \text{ si } n = 4k+3 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 4.1:
① ***Egalité de Bernoulli*** : $\forall a, b \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a\,b^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

② ***Somme géométrique*** : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, $(1 + z + z^2 + \cdots z^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Preuve :
① On développe
② Par récurrence sur n

Attention: Il n'est pas possible de définir dans $\mathbb{C}$ une relation d'ordre qui soit compatible avec les opérations usuelles. Dans la suite **on considère $\mathbb{C}$ comme non ordonné** et on utilise le signe $\leq$ uniquement entre deux réels.

2. Conjugaison

Déf: Soit z un nombre complexe, le conjugué de z est le nombre complexe $\boxed{\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)}$

Interprétation géométrique: $M'(\bar{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à (Ox).

Propriétés de la conjugaison: Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$,
① $\bar{\bar{z}} = z$ ② $\bar{z} + \bar{z'} = \overline{z + z'}$
③ $\bar{z} \times \bar{z'} = \overline{z \times z'}$ et par récurrence immédiate: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
④ Avec $z \neq 0$, $zz^{-1} = 1$ donne $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$, puis $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
⑤ $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
⑥ $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = x^2 + y^2$ si $z = x + iy$
⑦ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Dans la pratique:
★ Le point ⑥ permet de calculer les quotients : on multiplie et on divise par le conjugué du dénominateur.
★ Le point ⑦ permet de caractériser les réels et les imaginaires purs.

3. Module

3.1 Module d'un nombre complexe.

Déf: Soit $z\in\mathbb{C}$, on appelle module de $z = x + iy$ où x et $y \in\mathbb{R}$, le réel positif défini par:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Remarque: Lorsque z est réel son module est sa valeur absolue. Le module est donc une extension à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue.

Interprétation géométrique: Soit M(z), $|z| = OM$. On a $|-z| = |-z| = |\bar{z}| = z$ par argument de symétrie.

Propriétés du module: Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$
① $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
② $|z|^2 = z\bar{z}$ et donc si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
③ $|zz'|=|z||z'|$ et par récurrence immédiate $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
④ si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et si $z'\neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
⑤ $Re(z) \leq |z|$ et $Im(z) \leq |z|$

Proposition 4.2-Double inégalité triangulaire: Pour tous z et z' de $\mathbb{C}$,
① $\big||z| - |z'|\big| \leq \underbrace{|z + z'| \leq |z| + |z'|}_{\text{inégalité triangulaire}}$
② Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : $|z+z'| = |z|+|z'| \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z$ ou $z = 0$
③ Extension de l'inégalité triangulaire à n complexes :
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|z_1 + z_2 + \ldots z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$

Remarque : $\forall z, z'\in\mathbb{C}$, on a aussi : $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$

3.2 Nombres complexes de module 1

Déf: $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Interprétation géométrique: $\mathbb{U}$ est représenté dans le plan complexe par le cercle de centre O et de rayon 1.

Propriétés des complexes de module 1:
① $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$ car $|z| = 1 \Rightarrow z \neq 0$
② $1\in\mathbb{U}$
③ Si z et $z'\in\mathbb{U}$ alors $zz'\in\mathbb{U}$ car $|zz'| = |z|.|z'| = 1$
④ Si $z\in\mathbb{U}$ alors $z^{-1}\in\mathbb{U}$ car $|z^{-1}| = |z|^{-1} = 1$ de plus $z^{-1} = \bar{z}$

Proposition 4.3: $\mathbb{U} = \{\cos\theta + i\sin\theta, \theta\in\mathbb{R}\}$

Notation: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque: Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur 2π alors $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta\in I\}$.

Propriétés: Pour tous réels θ et θ':

① $e^{i0} = 1$ $\quad e^{i\pi/2} = i$ $\quad e^{i\pi} = -1$ $\quad |e^{i\theta}| = 1$

② $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\quad e^{i\theta}\, e^{-i\theta} = 1$ $\quad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\quad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

③ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

④ Formules d'Euler:

$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Leftrightarrow \boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ $\qquad e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

⑤ Formule de Moïvre: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ $\qquad$ cad $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

⑥ Utilisation de l'angle moitié : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$ $\qquad 1 - e^{i\theta} = -2i\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Application à la trigonométrie : transformation de produit en somme et de somme en produit (voir fiche trigo 2)

---

4 Arguments, forme exponentielle d'une nombre complexe non nul

Déf: Soit $z\in\mathbb{C}^*$, on appelle argument de z et on note arg(z) tout nombre réel θ tel que $z/|z| = e^{i\theta}$.
L'argument principal de z est l'unique réel convenant dans $]-\pi;\pi]$.

Remarques:

★ Si $\alpha\in\mathbb{R}$ est un argument de z alors tous les arguments de z sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
On écrit $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, $k\mathbb{Z}$ ou encore $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$.

★ 0 n'a pas d'argument.

Interprétation géométrique: $\arg(z) = (\vec{u},\overrightarrow{OM}) + 2k\pi$.

Conséquences: Soit $z\in\mathbb{C}^*$,

$z\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \arg(z) = k\pi$ $\quad$ et $\quad$ $z\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \arg(z) = 2k\pi$

$z\in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Proposition 4.4: Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = re^{i\alpha}$ avec $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, cette écriture est la forme exponentielle ou polaire de z. On a $r = |z|$ et α est un argument de z.

Conséquence: Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même module et mêmes arguments modulo 2π ou encore: $z = z' \Leftrightarrow re^{i\alpha} = r'e^{i\alpha'} \Leftrightarrow r = r'$ et $\alpha = \alpha'+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow r = r'$ et $\alpha \equiv \alpha'[2\pi]$.

⚠ Attention: Il n'y a pas unicité de la forme exponentielle.

Propriété des arguments: Soit z et $z'\in\mathbb{C}^*$

① $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$	*calculer zz'*
② $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$	*récurrence avec ①*
③ $\arg(1/z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$	*utiliser ①*
④ $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$	*utiliser ① et ③*
⑤ $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$	*graphiquement*
⑥ $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$	*graphiquement*

Dans la pratique: la forme exponentielle est particulièrement adaptée pour les calculs de produit, de quotient et de puissances.

✍ Application à la trigonométrie : transformation de acos x + bsinx.
On pose $Z = a + ib = Re^{i\theta}$ avec $R = \sqrt{a^2 + b^2}$.
On a alors en mettant R en facteur : $a\cos x + b\sin x = R\cos\theta\cos x + R\sin\theta\sin x = R\cos(x - \theta)$
(voir fiche trigo 2)

---

5. Exponentielle d'un nombre complexe:

Soit $z\in\mathbb{C}$, $z = x + iy$, on appelle exponentielle de z et on note e^z le complexe:

$\boxed{e^z = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)}$

Proposition 4.5 : Soit z et $z'\in\mathbb{C}$,
① $e^0 = 1$
② $e^z.e^{z'} = e^{z+z'}$

Conséquences:
★ Les propriétés de calcul s'étendent aux exponentielles complexes.
★ On a $|e^z| = e^x$ et $\arg(e^z) \equiv y\ [2\pi]$
★ $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi$

---

6. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

6.1 Racines carrées complexes

Def : Soit $a\in\mathbb{C}$, les racines carrées complexes de a sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$.

Proposition 4.6: Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes distinctes et opposées.

Dans la pratique: Si z se met facilement sous forme trigonométrique, on cherche ses racines carrées sous cette forme sinon on résout $(a + ib)^2 = z$ et $a^2 + b^2 = |z|^2$.

⚠ **Attention** la notation $\sqrt{a}$ est réservée aux réels, n'a de sens que pour $a \geq 0$ et définit LE réel positif dont le carré est a. Si a est un réel strictement positif, ses racines carrées complexes sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

6.2 Résolution de l'équation $az^2+bz+c = 0$

Théorème de résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes:
Soit à résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) avec $a, b, c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, Δ est le discriminant de (E).

- Si $\Delta = 0$ alors (E) admet une unique solution dans $\mathbb{C}$ ou solution double : $z_0=-b/2a$,
on a de plus $az^2 + bz + c = a(z-z_0)^2$.

- Si $\Delta \neq 0$ alors (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = (-b + \delta)/2a$ et $z_2 = (-b - \delta)/2a$ avec $\delta^2=\Delta$,
on a de plus $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

Conséquence: Tout polynôme de degré 2 a donc au moins une racine complexe.

⚠ **Attention**: Lorsque les coefficients sont complexes, les racines ne sont pas forcément conjuguées!!

Proposition 4.7: **Somme et produit des racines**: Notons z_1 et z_2 les solutions, éventuellement confondues de $az^2 + bz + c$ avec a, b, $c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$.

On a: $S = z_1+z_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = z_1z_2 = \frac{c}{a}$

Corollaire: Soit S et P deux nombres complexes., on a l'équivalence:

$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow$ z_1 et z_2 solutions de $z^2 - Sz + P = 0$

(voir fiche second degré)

6.3 Racines nièmes de 1

Def : Soit n un entier $n \geq 2$. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ sont appelées racines nième de 1 et leur ensemble est noté $\mathbb{U}_n$.

Proposition 4.8: $\mathbb{U}_n$ comporte exactement n éléments:

$\mathbb{U}_n = \{ 1, e^{i2\pi/n},\dots,e^{i2(n-1)\pi/n}\}$ ou encore $\mathbb{U}_n = \{ 1, w, w^2,\dots, w^{n-1}\}$ avec $w = e^{i2\pi/n}$.

Exemples à connaître

★ n = 2: $\mathbb{U}_2 = \{ 1;-1 \}$

★ n = 3: $\mathbb{U}_3 = \{ 1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\} = \{ 1, j, j^2 \}$ avec $j = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

★ n = 4: $z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$ donc $\mathbb{U}_4 = \{ 1, i, -1, -i \}$

Proposition 4.9 : Les images des racines nièmes de l'unité dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle trigonométrique ayant (Ox) comme axe de symétrie.

Proposition 4.10: Soit $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2$.

① La somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

② Le produit des éléments de $\mathbb{U}_n$ est égal à $(-1)^{n-1}$.

Conséquence : Reprenons $j = e^{i2\pi/3}$, $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$

6.4 Racines nième d'un nombre complexe:

Def : Soit $a\in\mathbb{C}$, les racines nièmes de a sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = a$.

Proposition 4.11: Tout nombre complexe non nul $a = \rho e^{i\alpha}$ possède exactement n racines nièmes qui s'écrivent: $\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\alpha}{n}} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ avec $k\in[\![0, n - 1]\!]$.

Dans la pratique: Les racines nièmes de a s'obtiennent en multipliant l'une d'elle par les racines nième de 1. (voir fiche racine nième)

6.5 Autres équations :

a. Equation polynômiale de degré n

Proposition 4.12 : Soit (E_n) : $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0 = 0$ où $a_n, a_{n-1},\ldots,a_1, a_0$ sont des complexes avec $a_n \neq 0$. Si z_0 est racine de (E_n) alors il existe $b_{n-1}, b_{n-2},\ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{C}$ tels que :

$(E_n) \Leftrightarrow (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1z + b_0) = 0$

b. Equation avec $\bar{z}$ et $|z|$

Le plus souvent on cherchera les solutions sous forme algébrique en posant $z = x + iy$ où $x,y \in \mathbb{R}$.
En présence de puissance, produit et quotient, on cherchera plutôt les solutions sous forme exponentielle

---

7. Fonctions à valeurs complexes

7.1 Généralités

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs complexes. Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$, on peut lui associer les fonctions suivantes:

- $\mathrm{Re}(f) : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{Re}(f(t)) \end{cases}$ qui est la partie réelle de f.
- $\mathrm{Im}(f) : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathrm{Im}(f(t)) \end{cases}$ qui est la partie imaginaire de f.
- $|f| : \begin{cases} I \to \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto |f(t)| \end{cases}$ qui est le module de f.

Toutes ces fonctions sont à valeurs réelles.

- $\bar{f} : \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \overline{f(t)} \end{cases}$ qui est la fonction conjuguée de f.

Déf: Soit $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$.
- On dit que f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

C'est à dire: $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
- f est continue en a ssi Re(f) et Im(f) le sont.
- f est dérivable en a ssi Re(f) et Im(f) le sont. et dans ce cas on a $\boxed{f'(a) = (\mathrm{Re}f)'(a) + i(\mathrm{Im}f)'(a)}$

Attention: **Il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ donc pas de** sens de variations, comparaison de fonctions, TVI....On se ramène aux fonctions Re(f) et Im(f) dès que l'on veut utiliser un résultat utilisant la relation d'ordre.

7.2 Fonction exponentielle complexe:

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\alpha t} \end{cases}$.

Proposition 4.13 :

① La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{\alpha t} \end{cases}$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \alpha e^{\alpha t}$

② Si $u \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$.est dérivable sur I alors $f : t \to e^{u(t)}$ est dérivable sur I et $f'(t) = u'(t).e^{u(t)}$.

Exercice résolu : Etude de $f : t \to 1 + e^{it}$