

Formulaire de trigonométrie ♥

I – Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

II – Relations entre cos, sin et tan

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

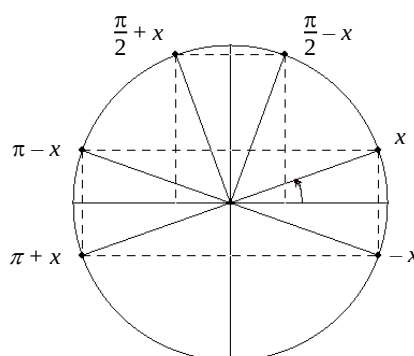
III – Angles associés

Une lecture efficace du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

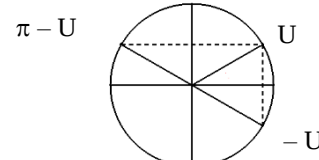
$$\begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos x \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

IV – Equations trigonométriques :

$$\cos U = \cos V \Leftrightarrow (U = V + 2k\pi \text{ ou } U = -V + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin U = \sin V \Leftrightarrow (U = V + 2k\pi \text{ ou } U = \pi - V + 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan U = \tan V \Leftrightarrow (U = V + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

**V – Formules d'addition et de duplication**

Formules d'addition.

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad & \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ & \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ & \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ & \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{aligned}$$

Lorsque $\tan(a + b)$ existe,

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Formules de duplication.

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}, \quad & \sin(2a) = 2 \sin a \cos a \\ & \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}$$

$$\text{Lorsque cela a un sens, on a : } \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

On en déduit :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos(2a))$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos(2a))$$

VI – Formule de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

VII- Transformation de produit en somme:

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]\end{aligned}$$

VIII- Transformation de somme en produit:

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \sin a + \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \sin a - \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

IX – Utilisation de l'angle moitié

$$\bullet \forall a \in \mathbb{R}, \quad 1 + \cos a = 2 \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) \text{ et } 1 - \cos a = 2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\bullet \text{ Soit } a \in \mathbb{R}, \text{ on pose, sous réserve d'existence, } t = \tan\left(\frac{a}{2}\right) \text{ on a}$$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \text{ et sous réserve d'existence, } \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

X – Transformation de $a \cos x + b \sin x$

On pose $Z = a + ib$, et $\boxed{R = \sqrt{a^2 + b^2}}$, on a $Z = R e^{i\theta}$ et donc $a = R \cos \theta$ et $b = R \sin \theta$

On met R en facteur dans Z : $a \cos x + b \sin x = R(\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = R \cos(x - \theta)$

Exemple: $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$