Exercices-Chapitre 4: Nombres complexes et applications

♥ A savoir refaire - ♦ Corrigés

♥ Calcul sur les nombres complexes

4.1 Donner la forme algébrique des nombres suivants:

a = $(3 + 4i)^3 - (7 - 2i)^2$ b = $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ c = $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$ d = $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

e = $\left(-\dfrac{i}{3}\right)^3+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^2$ f = $\overline{i(4-2i)^2}$ g = $\overline{\left(\dfrac{i\sqrt{3}}{1+6i}\right)}$

4.2 Soit $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ et $z_2 = \dfrac{i}{2i\sqrt{3}-2}$, calculer:

$z_1 + z_2$, z_1z_2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $1 + z_1^2$ $z_1\overline{z_2}$ $\dfrac{z_1^{\ 2}}{\overline{z_2}}$

4.3 Calculer les inverses des nombres suivants

$a = 1+\dfrac{1+i}{1-2i}$ $b = i-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ $c = 1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

4.4 Soit x un réel, donner les parties réelles et imaginaires de

$(x - 2i)^2$ $(x + i)^3$ $(1 + ix)(1 - ix)$ $\dfrac{x+i}{x-i}$ $\dfrac{x+2i}{ix+1}$

Même question pour $\dfrac{2+\overline{z}}{1-\overline{z}}$ où z est un complexe différent de 1.

4.5 Déterminer les valeurs des réels a et b pour que z = (2a – b -i(a + b))(-a - i(a + b)) soit réel.

4.6 Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul, on a:

$S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)i^k = 1 + 2i + 3i^2 + ... + ni^{n-1} = \dfrac{1}{2}[-(n+1)i^{n+1} - ni^n + i]$.

En déduire une expression simple de:

$S_1 = 1 - 3 + 5 + ... + (-1)^p(2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 + ... + (-1)^{p-1}(2p)$ où $p\in\mathbb{N}$.

Conjugué, module:

4.7 Résoudre dans $\mathbb{C}$

a) $2z+6\overline{z} = 3+2i$ b) $z^5 = \overline{z}$ c) $|z|+z = 3+4i$ d) $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z-1|$

4.8 Soit u et v $\mathbb{C}$ tels que uv ≠ -1, montrer que: u et $v\in\mathbb{U} \Rightarrow \dfrac{u+v}{1+uv}\in\mathbb{R}$.

La réciproque est-elle vraie?

4.9 Soit $u\in\mathbb{C}$-{1}, montrer que : $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ ou $u\in\mathbb{U}$

4.10 Soit $z\in\mathbb{C}$-{-1}, montrer que : $z\in\mathbb{U} \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R},\ z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$

♥ **4.11** Démontrer que $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \le \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$

♦ **4.12** Soit u et v∈ℂ, démontrer que:
$|u|+|v| \le |u+v|+|u-v|$ et $|u+v|^2+|u-v|^2 = 2(|u|^2+|v|^2)$.

4.13 Démontrer que $\sup\limits_{|z|\le 1}|z^3+2iz| = \sup\{ |z^3+2iz|, z\in\mathbb{C}, |z|\le 1 \} = 3$

Forme exponentielle

♥ **4.14** Soit θ un réel et les complexes $z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = 1 - e^{i\theta}$.
Donner le module et un argument de z_1 et z_2 dans les cas suivants :
a) $\theta\in[-\pi, \pi]$ b) $\theta\in[0, 2\pi]$ c) $\theta\in\mathbb{R}$.

♥ **4.15** Mettre sous forme exponentielle les complexes suivants sachant que $\alpha\in]-\pi;\pi]$ et $n\in\mathbb{N}$.

a) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^2}{(1-i)^3}$ b) $\left(\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}\right)^3$ c) $(1+i\sqrt{3})^{2013}-(1-i\sqrt{3})^{2013}$

d) $-4(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ e) $3(-\sin\alpha - i\cos\alpha)$ f) $1 + \cos2\alpha + i\sin2\alpha$

g) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-\cos\alpha-i\sin\alpha}$, $\alpha\neq 0$ h) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}\right)^n$ i) $1 + i\tan\alpha$ avec $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

♦ **4.16** Soit a et b∈𝕌, montrer que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}\in\mathbb{R}^+$, la réciproque est-elle vraie?

4.17 Trouver tous les entiers naturels n tels que $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}\right)^n\in\mathbb{R}^+$

♥ **4.18** Ecrire $(-1 + i)^{17}$ sous forme algébrique.

♦ **4.19** On pose $z = -\sin(2\theta) + 2i\cos^2\theta$ avec $\theta\in]-\pi, \pi[$.
1. Suivant les valeurs de θ, trouver le module et un argument de z.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de θ, z et 1 – z ont-ils le même module ?

Equations de degré n dans ℂ.

♥ **4.20** Résoudre dans ℂ:
a) $z^2 + 3iz + i - 3 = 0$ b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ c) $z^2 + z - (1 +3i) = 0$

d) $\begin{cases} x+y = 1+i \\ xy = 2-i \end{cases}$

♥ **4.21 Résoudre dans ℂ**
a) $z^8 = 1$ b) $z^6 = -1$ c) $z^4 = 1 - i$ d) $(z + 1)^3 = i$
e) Calculer $(1 + 2i)^4$ puis résoudre $z^4 = -7 - 24i$

4.22 Résoudre dans ℂ
a) $z^4 + z^2 + 1 = 0$ b) $z^6 - (1 - i)z^3 - i = 0$

4.23 Résoudre dans ℂ :
a) $z^4 - 4(1 + i)z^3 + 12iz^2 + 8(1 - i)z - 5 = 0$ *On cherchera deux solutions évidentes*
b) $2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$ *On cherchera une solution réelle*
♦ c) $iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0$ *On cherchera une solution imaginaire pure*

♥ **4.24** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$

a) $z^n = 1 + i$ b) $(z + 1)^n = (z - 1)^n$ ♦ c) $(z + i)^n = (z - i)^n$ d) $\sum_{k=0}^{n} z^{2k} = 0$

♥ **4.25** Soit θ un réel, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$
En déduire les solutions de $z^{2n} - 2z^n\cos\theta + 1 = 0$ où $n\in\mathbb{N}^*$

♦ **4.26** Résoudre dans $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

♥ **4.27** Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

a) Calculer $A + B$ puis AB.

b) En déduire les valeurs exactes de A et de B sous la forme $\frac{a+i\sqrt{b}}{c}$ avec $a, b, c\in\mathbb{Z}$

Application à la trigonométrie

♥ **4.28** Mettre sous forme exponentielle $\frac{(1+i\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha}$ où $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *Formule de trigo….*

♥ **4.29** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

a) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ b) $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$ c) $\sin 3x + \sin 5x \geq 0$
d) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$ e) $\cos x - \sin x > 1$

♦ **4.30** Montrer que $\forall(a, b, c)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases}\cos a + \cos b + \cos c = 0\\ \sin a + \sin b + \sin c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0\\ \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0\end{cases}$.

4.31 Calculer $S = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$

♦ **4.32** Calculer $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$ en utilisant des formules du cours.

En déduire une simplification de $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$

4.33 Soit $a, b\in\mathbb{R}$, montrer que $f : \begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto a\cos x + b\sin x\end{cases}$ admet un minimum et un maximum.