Exercices –Chapitre 5: Calcul de sommes et de produits.

♦ **Eléments de correction en ligne**

5.1 *Ecritures d'une somme et d'un produit.*

a. Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

(1) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ (2) $\sum_{i=1}^{n}(\lambda + a_i) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i$ (3) $\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$

(4) $\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$ (5) $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^p$

b. Recopier et remplacer le symbole □ dans les écritures suivantes:

$\sum_{k=3}^{n+2} a_{k+1} = \sum_{j=\square}^{\square} a_j$ $\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} = \sum_{j=0}^{\square} a_{\square}$ $\sum_{p=0}^{n} p a_{p+1} = \sum_{q=\square}^{\square} \square a_q$

$\sum_{k=2}^{2n}(k-2)a_k = \sum_{k=\square}^{\square} k a_{\square}$ $\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k = \sum_{k=\square}^{\square} a_k$ $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} = \sum_{k=\square}^{\square} a_k$

c. Donner directement la valeur des sommes suivantes :

$\sum_{k=1}^{i} k$, $\sum_{i=1}^{n-1} i^2$, $\sum_{k=0}^{2n} k^3$, $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$, $\sum_{j=1}^{n} 3^j$, $\sum_{k=2}^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

♥ **5.2** On donne l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = 2n(n+3)$.

Calculer $\sum_{k=0}^{10} a_k$ et $\sum_{k=5}^{20} a_k$ puis $\sum_{k=0}^{n+1} a_k$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $\sum_{k=n}^{2n} a_k$ .enfin déterminer a_k en fonction de $k \in \mathbb{N}$.

5.3 *Ecritures d'un produit*

Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses.

(1) $\prod_{k=0}^{n} 2 = 2^n$ (2) $\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$ (3) $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$

(4) $\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \prod_{k=1}^{n} a_k$ (5) $\prod_{k=1}^{n} 2a_k = 2^n \prod_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$ (6) $\prod_{k=1}^{n} a_{n+1-k} = \prod_{k=1}^{n} a_k$

Techniques de calcul

♥ **5.4** Calculer les sommes et les produits suivants :

$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k}$ $S_3 = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{3^{k-1}}$ $S_4 = \sum_{k=3}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$S_5 = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$ $S_6 = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ $S_7 = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ $S_8 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$

$S_9 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ $S_{10} = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$ $S_{11} = \sum_{p+q=n} pq$

$S_{12} = \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ $S_{13} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ où $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ $S_{14} = \sum_{k=1}^{2n} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

$P_1 = \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$ $P_2 = \prod_{k=0}^{n} 2^k 3^{-k}$ $P_3 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$

♥ **5.5** Calculer les sommes doubles suivantes

$A = \sum_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2$ $B = \sum_{1 \le i,j \le n} \min(i,j)$ $C = \sum_{1 \le i,j \le n} |i-j|$

$D = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{i}{k+1}$ $E = \sum_{1\le i<j\le n} i$ $F = \sum_{1\le i\le j\le n} 2^i$

♥ **5.6** Soit $a\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on propose de calculer de deux manières différentes $S = \sum_{k=1}^{n} ka^k$.

1. Calculer S en remarquant que $S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a^k$.

2. Retrouver la valeur de S en calculant de deux manières différentes la dérivée de $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

5.7 Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor \frac{x+k}{n}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$

♦ **5.8** Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose, $P(x) = \prod_{k=0}^{n}\cos(2^k x)$

a. Calculer P(x) lorsque $x = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
b. Pour $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et déterminer P(x).

♦ **5.9** Montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k}{k}$

Autour de la formule du binôme

♥ **5.10** Calculer les sommes suivantes :

$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k$, $B = \sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{2^k}$, $C = \sum_{k=1}^{n}2^{k-1}3^{n-k+1}\binom{n}{k}$, $D = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$, $E = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k}$

♥ **5.11** a. Soit $A = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}$ et $B = \sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}$, calculer A + B, A - B puis A et B

b. Calculer $(1 + i)^n$ puis $C = \sum_{0\le 2k\le n}(-1)^k\binom{n}{2k}$ et $D = \sum_{0\le 2k+1\le n}(-1)^k\binom{n}{2k+1}$

c. Calculer $E = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$ $F = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$ $G = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n-k}{n-i}\binom{n}{k}$

♥ **5.12 Deux méthodes pour des sommes classiques**

a. En utilisant la relation : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, calculer $S_1 = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$

b. Soit $n\in\mathbb{N}$, on définit f sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)^n$.

Calculer f'(x) et f''(x) de deux manières différentes. En déduire $S_1 = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$

♦ **5.13** Linéariser: $\cos^3(\theta)$, $\sin^3(\theta)\cos^2(\theta)$, $\sin^4(\theta)\cos(\theta)$, $\sin(\theta)\cos^3(\theta)$

♦ **5.14** Délinéariser: $\cos(4x)$, $\sin(5x)$, $\sin(2x)\cos(3x)$

5.15 Déterminer une fonction polynôme P telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(5x) = P(\cos x)$.

En déduire les lignes trigonométriques de $\frac{\pi}{10}$

5.16 Démontrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k}-\sqrt{k-1}$.

En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la partie entière de : $S_n = \sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2\sqrt{k}}$