

Chapitre 5: Calcul de sommes et de produits-polycopié de cours

1. Calcul de sommes

1.1 le symbole \sum

Déf: Soit $(a_k)_{k \in E}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E

On note $\sum_{k \in E} a_k$ la somme de tous les éléments de la famille.

Remarque: l'indice k est muet, ainsi, $\sum_{k \in E} a_k = \sum_{i \in E} a_i = \sum_{j \in E} a_j = \dots$

Convention: Si $E = \emptyset$ alors $\sum_{k \in E} a_k = 0$

☞ Cas particuliers usuels:

★ Si $E = \llbracket 0, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

★ Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

★ Si $E = \llbracket p, n \rrbracket$ où n et $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq n$, $\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$ et si $p > n$, $\sum_{k=p}^n a_k = 0$ par convention.

Propriétés: Soit $n, p \in \mathbb{Z}$ avec $p \leq n$,

$$\bullet \sum_{k=p}^{n+1} a_k = \sum_{k=p}^n a_k + a_{n+1} \quad \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k, \quad 1 \leq p \leq n \quad \sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_k$$

$$\bullet \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k = \sum_{k=p}^n (a_k + b_k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=p}^n a_k \quad \text{linéarité de la somme}$$

1.2 Sommes à connaître:

① **Somme de termes constants:**

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a = (n+1)a$$

et

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall n, p \in \mathbb{Z}, p \leq n, \sum_{k=p}^n a = (n-p+1)a$$

② **Somme des entiers, des carrés des entiers, des cubes des entiers :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \heartsuit$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \heartsuit$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \heartsuit$$

③ **Sommes géométriques:**

$$\forall q \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases} \quad \heartsuit$$

☞ **Application:** Soit x un réel et $n \in \mathbb{N}$, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

⑤ Formule de Bernoulli :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = \dots = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \quad \heartsuit$$

Applications :

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{C}, x^n - 1 = (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{C}, x^{2p+1} + 1 = x^{2p+1} - (-1)^{2p+1} = (x+1) \sum_{k=0}^{2p} (-1)^{2p-k} x^k$$

1.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice :** Soit $n, p \in \mathbb{Z}, n \leq p$

a. Translation: Soit $S = \sum_{k=p}^n a_k$, on pose $j = k - p$, on a $k = j + p$ et $S = \sum_{j=0}^{n-p} a_{j+p}$.

Comme l'indice est muet, on peut écrire $S = \sum_{k=0}^{n-p} a_{k+p}$ ($k \leftarrow k+p$).

Application : $\sum_{k=p}^n q^k = \sum_{k=0}^{n-p} q^{k+p} = q^p \sum_{k=0}^{n-p} q^k = \begin{cases} q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-p+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$ si $q \neq 1, (n-p+1)$ sinon.

On en déduit : Soit u une suite géométrique de raison $q \neq 1$, $\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

b. Symétrie: Soit $S = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$, le changement d'indice $j = n - k$ donne $S = \sum_{j=0}^n a_j$ et comme

l'indice est muet on peut écrire que: $S = \sum_{k=0}^n a_k$ ($k \leftarrow n-k$).

Application : Soit u une suite arithmétique de raisons r , $\sum_{k=p}^n u_k = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

☒ Exercice résolu: Calcul de $\sum_{k=0}^{2n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

② **Sommation par paquets :**

Dans certains calculs, regrouper les termes par paquets permet de faire des simplifications. On peut, en particulier, regrouper les termes d'indices pairs et d'indices impairs :

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ pair}}}^n a_k + \sum_{\substack{k=m \\ k \text{ impair}}}^n a_k = \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} a_k + \sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} a_k = \sum_{m \leq 2k \leq n} a_{2k} + \sum_{m \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1}$$

☒ Exercice résolu: Calcul de $\sum_{k=1}^{2n} k(-1)^k$ de deux manières différentes.

③ **Somme télescopique :**

Une somme télescopique est une somme pouvant s'écrire sous la forme:

$$S_1 = \sum_{k=p}^n (a_{k+1} - a_k) \text{ ou } S_2 = \sum_{k=p}^n (a_k - a_{k+1}).$$

Dans ce cas on a les simplifications respectives :

$$S_1 = a_{n+1} - a_p \qquad S_2 = a_p - a_{n+1}$$

✎ Exercice résolu: Calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

2. Formule du binôme et applications

2.1 Les coefficients binomiaux :

Def : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, le coefficient binomial « k parmi n » est l'entier naturel défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leq k \leq n \text{ et } \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k < 0 \text{ ou } k > n$$

✎ Exemples: Calculer $\binom{10}{3}$.

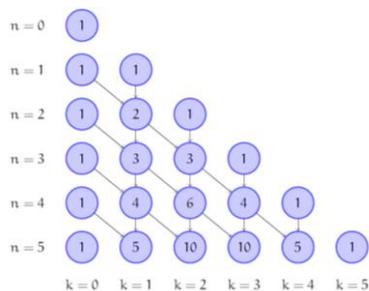
Propriété: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\textcircled{1} \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{en particulier: } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \heartsuit$$

$$\textcircled{2} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{relation de Pascal} \quad \heartsuit$$

$$\textcircled{3} \text{ Si } 1 \leq k \leq n, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad \text{formule du capitaine} \quad \heartsuit$$

Application: triangle de Pascal : La valeur dans une case s'obtient en additionnant la valeur de la case au dessus et celle de la case au-dessus à gauche



Remarque : On peut montrer que lorsque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la formule définissant $\binom{n}{k}$ donne

bien un entier naturel, en raisonnant par récurrence sur n (numéro de la ligne dans le triangle).

2.2 Formule du binôme de Newton:

Théorème 5.1 : Soit a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \heartsuit$

✎ Démo par récurrence sur n A savoir refaire.

Dans la pratique: On utilise le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients.

2.3 Des applications

① **Calcul de sommes :**

✎ A savoir retrouver et justifier : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \heartsuit$

② Transformation d'expressions trigonométriques

★ Linéarisation de $\cos^p \sin^q$: On utilise les formules d'Euler puis on développe en utilisant la formule du binôme, enfin on regroupe les termes pour faire apparaître des $\cos(ka)$ et $\sin(ka)$ grâce aux formules d'Euler.

$$\text{Exemples : } \cos^3 a = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \right)^3 = \frac{1}{4} \cos(3a) + \frac{3}{4} \cos a \text{ et } \sin^3 a = \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{4} \sin(3a) + \frac{3}{4} \sin a$$

★ Délinéarisation de $\cos(px)$ ou de $\sin(qx)$: On utilise la formule de Moivre puis on développe le membre de gauche en utilisant la formule du binôme puis on identifie les parties réelles et imaginaires.

$$\text{Exemples : } \cos(3a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a \text{ et } \sin(3a) = -4 \sin^3 a + 3 \sin a$$

3. Produits

3.1 le symbole \prod

Déf : Soit $(a_k)_{k \in J}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble fini E .

On note $\prod_{k \in E} a_k$ le produit de tous les éléments de la famille.

Remarque : l'indice k est muet, ainsi, $\prod_{k \in J} a_k = \prod_{i \in J} a_i = \prod_{j \in J} a_j = \dots$

Convention : Si $E = \emptyset$ alors $\prod_{k \in E} a_k = 1$

Cas particuliers usuels :

★ Si $E = \llbracket 0, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=0}^n a_k = a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n$

★ Si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

★ Si $E = \llbracket p, n \rrbracket$ où n et $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq n$, $\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n$ et si $p > n$, $\prod_{k \in E} a_k = 1$ par convention.

Propriétés immédiates : On donne n, p, m entiers, $p \leq m \leq n$ et α, λ des réels.

• $\exists k \in E, a_k = 0 \Rightarrow \prod_{k \in E} a_k = 0$

• $\prod_{k=p}^{n+1} a_k = a_{n+1} \prod_{k=p}^n a_k$ $\prod_{k=p}^n a_k = \prod_{k=p}^m a_k \prod_{k=m+1}^n a_k$

• $\prod_{k=p}^n a_k \cdot \prod_{k=p}^n b_k = \prod_{k=p}^n a_k b_k$ $\left(\prod_{k=p}^n a_k \right)^\alpha = \prod_{k=p}^n (a_k)^\alpha$ $\prod_{k=p}^n \lambda a_k = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^n a_k$

3.2 Produits à connaître :

① **Produit de facteurs constants.** Soit a un nombre complexe, $\prod_{k=p}^n a = a^{n-p+1}$

② **Factorielle (de) n** : Soit n un entier naturel, $n \geq 1$, la factorielle de n est l'entier :

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times n \quad \heartsuit$$

Par convention, on pose $0! = \prod_{k=0}^0 k = 1$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$

☞ Exercice résolu: Calcul de $\prod_{k=1}^n (2k)$ et $\prod_{k=0}^n (2k+1)$

3.3 Techniques de calcul

① **Changement d'indice**: Même chose que pour les sommes.

② **Produit télescopique**: Un produit télescopique est un produit de facteurs pouvant s'écrire

sous la forme: $P = \prod_{k=p}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$ ou $P = \prod_{k=p}^n \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

On a alors après simplification $P = \frac{a_{n+1}}{a_p}$ et $P = \frac{a_p}{a_{n+1}}$.

☞ Exercice résolu: Calcul de $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

4. Sommes doubles

On considère une famille de nombres complexes $(a_{i,j})$ doublement indexées par des entiers i et j

4.1 Somme sur un rectangle

On suppose que (i, j) vérifie de manière indépendante $p \leq i \leq n$ et $m \leq j \leq l$.

Définition et propriété : Soit $E = \llbracket p, n \rrbracket \times \llbracket m, l \rrbracket$, on note $\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ m \leq j \leq l}} a_{i,j}$ la somme des éléments de la

famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$. On a $\sum_{\substack{p \leq i \leq n \\ m \leq j \leq l}} a_{i,j} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=m}^l a_{i,j} = \sum_{j=m}^l \sum_{i=p}^n a_{i,j}$

Dans la pratique : On peut retenir le principe suivant :

Si les deux champs d'indices sont indépendants alors on peut inverser l'ordre de sommation sans modifier les bornes des sommes.

☞ Exercice résolu: Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (2i+j)$ et $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$

Cas particulier : $\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j$

4.2 Somme triangulaire

On suppose que les indices i et j ne sont pas indépendants et vérifient des inégalités du type

$p \leq i \leq j \leq n$ ou $p \leq i < j \leq n$ ou $p \leq j \leq i \leq n$ ou encore $p \leq i < j \leq n$

Définition et propriété :

① Soit $E = \{(i, j), p \leq i \leq j \leq n\}$, on note $\sum_{p \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$.

$$\text{On a } \sum_{p \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=p}^n \sum_{i=p}^j a_{i,j}$$

② Soit $E = \{(i, j), p \leq i < j \leq n\}$, on note $\sum_{p \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in E}$.

$$\text{On a } \sum_{p \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=p+1}^n \sum_{i=p}^{j-1} a_{i,j}$$

Les autres cas s'en déduisent

Dans la pratique : On peut retenir que lorsque les champs d'indice sont liés, pour inverser l'ordre de sommation, il faut modifier les bornes pour respecter les contraintes sur les indices.

☞ Exercice résolu: Calculer $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$

