Programme de colles-semaine 7 - 12/11 au 15/11

I. Calculs de sommes et de produits

- La notation $\sum_{k\in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes

Propriétés, sommes à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, séparation des termes d'indice pairs et impairs, télescopage.

La notation $\prod_{k\in E} a_k$, où E est un ensemble fini d'indices et (a_k) une famille de complexes.

Propriétés, produit à connaître, techniques de calcul : changement d'indice, télescopage.

- Coefficients binomiaux, définition et propriétés. Formule du binôme de Newton et applications à la trigonométrie.
- Calcul de sommes doubles $\sum_{p\le i,j\le n} a_{i,j}$, de sommes triangulaire $\sum_{p\le i\le j\le n} a_{i,j}$ ou $\sum_{p\le i<j\le n} a_{i,j}$.

II. Calcul d'intégrales et de primitives

- Rappel de Terminale et extension aux fonctions à valeurs complexes.

Si f est continue sur I et si $a\in I$, $x\mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

La notation $\int^x f(t)dt$ désigne une primitive quelconque de f sur I.

- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives usuelles et par transformation algébrique de la fonction à intégrer.

Déroulement de la colle:

① Donner deux formules du formulaire n°1 ci-joint

② Une question de cours parmi

- Démonstration de la formule du binôme de Newton
- Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et de $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$ où x est un réel.
- Calcul d'une primitive de $f : x\mapsto \cos^p x\sin^q x$ sur un exemple
- Calcul d'une primitive de $f : x\mapsto e^{ax}\cos(bx)$ sur un exemple

③ Calcul d'une somme double

④ Exercice sur les sommes et le calcul de primitives.

Evaluation: Connaître son cours est une condition nécessaire pour obtenir une note > 10

Formulaire 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n+1 \right)$

2. Sous réserve d'existence, $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

3. Sous réserve d'existence, $\left(g \circ f\right)' = f' \times \left(g' \circ f\right)$

4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

5. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$
$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

6. Sous réserve d'existence : $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

7. Sous réserve d'existence : $\cos(x) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\sin(x) = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ où $t = \tan\dfrac{x}{2}$

8. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

9. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b) + \sin(a+b)\right)$$

10. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$
$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

11. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$, $\forall x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$

12. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}$, $a^b = e^{b\ln(a)}$

13. Soit α fixé dans $\mathbb{R}$, $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

14. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

15. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ch' = sh
sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ est sh' = ch

16. $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$

17. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ $\left||z| - |z'|\right| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

18. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ $|z|^2 = z\bar{z}$

19. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ et $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

20. $\forall \theta \in \mathbb{R}$ $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

21. Si z_1 et z_2 sont les solutions, éventuellement confondues de $az^2 + bz + c$ avec $a \neq 0$.

alors $S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$

22. Soit S et P fixés dans $\mathbb{C}$, $\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases} \Leftrightarrow z_1$ et z_2 racines de $Z^2 - SZ + P = 0$

23 $\mathbb{U}_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \} = \{ e^{i2k\pi/n},\ k \in [\![0, n-1]\!] \} = \{ 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1} \}$ avec $\omega = e^{i2\pi/n}$.

24. $\displaystyle\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$

25. $j = e^{i2\pi/3}$ $j^3 = 1$ $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ $1 + j + j^2 = 0$ $j^2 = \bar{j}$

26. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

27. $\forall q \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$

28. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a - b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$

29. Soit $n \in$ et $k \in [\![1, n]\!]$, $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k} + \dbinom{n-1}{k-1}$ et $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$

30. Soit a et $b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$, $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$a = b = 1$ donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $a = 1$ et $b = -1$ donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$